

**ZAHLSYSTEME
UND
ZAHLSYMBOLS**

Walter Fuchs

1975



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551925_0003

Z A H L S Y S T E M E

U N D

Z A H L S Y M B O L E

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Philosophischen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität
zu München

vorgelegt von
W a l t e r F u c h s
aus Augsburg

1974



1. Berichterstatter:	Prof. Dr. H. Schiefele
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. K. Seebach
Tag der mündlichen Prüfung:	27.2.1975

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG	S. 3
DIDAKTISCHE ANALYSE DES LEHRPROGRAMMS	S. 7
1. Programmbeschreibung	S. 7
2. Programmgestaltung	S. 13
3. Programmerprobung	S. 30
4. Programmbewertung	S. 40
LEHRPROGRAMM "ZAHLSYSTEME UND ZAHLSYMBOLS"	S. 47
1. Zahlssysteme I	S. 47
2. Zahlssymbole I	S. 59
3. Zahlssysteme II	S. 72
4. Zahlssymbole II	S. 84
5. Zählvorgang	S. 96
6. Einmal eins	S. 112
7. Operationen	S. 125
8. Übersetzung	S. 140
9. Bruchzahlen	S. 154
10. Teilbarkeit	S. 169
LITERATURVERZEICHNIS	S. 186
1. Mathematische Darstellungen	S. 186
2. Programmierte Darstellungen	S. 189
3. Historische Darstellungen	S. 191
4. Didaktische Darstellungen	S. 194
5. Curriculare Darstellungen	S. 197
6. Darstellungen zur Progr. Unterweisung	S. 200

EINLEITUNG

Am 3. Okt. 1968 wurden von der Kultusministerkonferenz die "Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an allgemeinbildenden Schulen" veröffentlicht, die allen Lehrplänen für Mathematik in den einzelnen Bundesländern zur Vorlage dienen. Für die Grundschule nennen sie fünf Themenkreise: Mengen und ihre Verknüpfungen, Größen, geometrische Grundbegriffe, Ziffern und Stellenwertsysteme. Mit diesem letztgenannten Thema befaßt sich die vorliegende Arbeit. Die entsprechende Anregung gab Prof. Dr. Hans SCHIEFELE, UNIVERSITÄT MÜNCHEN.

Auf die Absichten der genannten Empfehlungen und Richtlinien soll hier nicht weiter eingegangen werden. Es ist bekannt, daß "Mathematik in der Grundschule" einerseits heftig abgelehnt, für überflüssig oder gar schädlich gehalten, andererseits ebenso heftig empfohlen und angepriesen wird.

Es sollen auch Begründungen, die für das Teilgebiet "Ziffern und Stellenwertsysteme" genannt werden, lediglich aufgezählt, jedoch nicht in jedem Fall übernommen werden.

Der Umgang mit verschiedenen Zahlssystemen und Zahlsymbolen

- (1) verdeutlicht die Regelhaftigkeit des Stellenwertprinzips und die Zufälligkeit des Dezimalsystems;
- (2) erleichtert das Verständnis der für unsere Zahlschrift verwendeten Stellenwertschreibweise;
- (3) ermöglicht ein Denken im Binärsystem, das für Computertechnik und Datenverarbeitung verlangt wird;

- (4) erklärt den Unterschied zwischen Zahl und Ziffer; für die gleiche Zahl können verschiedene Ziffern stehen;
- (5) überläßt das Rechnen nicht allein mechanischen Abläufen, sondern führt zu mathematischem Verständnis.

Die vorliegende Arbeit, ein Lehrprogramm, verfolgt im Grunde nur den Zweck, angehende oder den Beruf bereits ausübende Lehrer mit dem Thema "Zahlsysteme und Zahlensymbole" vertraut zu machen und ihnen so ein eigenes Urteil zu ermöglichen. Denn neue Lehrinhalte abzulehnen oder anzunehmen ist nur sinnvoll, wenn man diese kennt.

Sollte das Thema für die Grundschule dann ungeeignet erscheinen, so verbleibt für den konventionellen Rechenunterricht vielleicht doch didaktischer Gewinn, nämlich die Erkenntnis Artur Kerns, "daß der Schwierigkeitsgrad der Durchschaubarkeit des Positionssystems in einem in Staunen versetzenden Ausmaße unterschätzt wird. Wir bieten sieben- bis achtjährigen Kindern ein hochgeistiges mathematisches Symbolsystem an, das die Kulturvölker erst nach jahrtausendlangem Ringen ihrer besten Köpfe gefunden haben. Die geniale Einfachheit, mit der sich heute das Zehnersystem anbietet und schreiben läßt, bedeutet nicht, daß es auch von Kindern mit Leichtigkeit begriffen werden könnte".

Lehrprogramme sollten zweckmäßigerweise in ein größeres Lehrsystem eingebettet sein, das die programmierten durch konventionell dargebotene Lehrinhalte ergänzt.

Denkbar wäre hier vor allem ein historischer Abriss zum Thema "Zahlsysteme und Zahlensymbole", der zeigt, wie Zahlen im Laufe der Entwicklung der menschlichen Kultur dargestellt, welche repetitiven, figurativen und situativen Methoden der Zehnnotation verwendet wurden.

Auch didaktische Erörterungen wären möglich, verdeutlicht etwa durch Aufzeichnung und Beurteilung konventionellen Unterrichts, ebenso Hinweise auf Arbeits- und Anschauungsmittel und ihre methodische Bewertung, schließlich entwicklungs- und lernpsychologische Überlegungen zum gegebenen Thema. Ansatzpunkte dieser Art bietet das nach mathematischen, historischen, didaktischen, curricularen Gesichtspunkten gegliederte Literaturverzeichnis.

Das vorliegende Lehrprogramm ist keineswegs für Schüler, aber ebensowenig für Mathematiker gedacht, sondern für Studierende, die sich für das Gesamtgebiet "Mathematik in der Grundschule" interessieren. Die Darstellung des mathematischen Inhalts ist dieser Absicht angepaßt.

Verzichtet wurde deshalb auf Formulierungen allgemeiner Art, wie etwa die folgende: Jede natürliche Zahl n ist auf genau eine Weise durch das p -adische System darstellbar in der Form

$$n = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0$$

Solche Darstellungen lassen sich nämlich nur schwer konkretisieren, und gerade dies wurde aus methodischen Gründen angestrebt. Jeder einzelne Lehrschritt versucht, mathematischen Inhalt zu realisieren und zu verbalisieren.

Es sollte dadurch eine breite Induktionsbasis geschaffen werden für eine nachfolgende Abstraktion, wobei diese letztlich dem Bearbeiter des Lehrprogramms überlassen bleibt, vom Lehrprogramm also zwar angestoßen, aber nicht ausdrücklich gefordert oder zu Ende geführt wird.

Ob ein solches Verfahren zulässig ist, mag von der Mathematik oder der Psychologie her bezweifelt werden. Es war auch nicht mehr als ein didaktischer Versuch, der erfolglos enden konnte, dessen mögliches Gelingen aber vornehmlich nach den Ergebnissen einer statistisch ausgewerteten Programmerprobung beurteilt werden sollte. Die vorliegende Arbeit verfolgt lediglich didaktische, nicht aber mathematische oder psychologische Absichten.

Und dies gilt nicht nur für den Aufbau, sondern auch für die Abfolge der einzelnen Lehrschritte.

Jedes Lehrprogramm ist nach einer bestimmten Ordnung angelegt, die sich am Subjekt oder am Objekt orientieren kann. Im vorgegebenen Fall müßte es sich somit um mathematische oder psychologische Linearität handeln.

Es erwies sich bei der Programmgestaltung jedoch als beinahe unmöglich, die verschiedenen Lehrschritte mathematisch oder psychologisch linear anzuordnen. Weder mathematische Inhalte noch psychologische Abläufe sind derart gestaltet.

Nach einer Reihe vergeblicher Versuche, Ordnungskriterien aufzustellen, ergab sich schließlich folgendes Verfahren: Das gesamte Gebiet wurde in kleine Teileinheiten aufgegliedert, die daraus entstehenden ganzheitlichen Lehrschritte, die sich gegenseitig überschneiden sollten, wurden aneinandergereiht, wobei anfangs allein die didaktischen Anmutungen des Verfassers, später aber durchwegs die Ergebnisse der Programmerprobung für die Reihenfolge bestimmend waren.

Das Ideal wäre dann erreicht worden, wenn möglichst alle Lehrschritte durch Aufbau und Abfolge für möglichst alle Teilnehmer weder zu leicht noch zu schwer gewesen wären.

DIDAKTISCHE ANALYSE DES LEHRPROGRAMMS

1. Programmbeschreibung

- 1.1. Als T i t e l des Lehrprogramms wurde "Zahlssysteme und Zahlssymbole" anstelle des ebenfalls möglichen "Zahl und Ziffer" gewählt.
- 1.2. Das Lehrprogramm besteht in seiner vierten Version aus zehn Teilen und enthält insgesamt 129 ganzseitige Lehrschrirte in linearer Folge, die sich wie folgt verteilen:

Zahlssysteme I		11 Lehrschrirte
Zahlssymbole I		12 Lehrschrirte
Zahlssysteme II		11 Lehrschrirte
Zahlssymbole II		11 Lehrschrirte
Zählvorgang		15 Lehrschrirte
Einmal-eins		12 Lehrschrirte
Operationen		14 Lehrschrirte
Übersetzung		13 Lehrschrirte
Bruchzahlen		14 Lehrschrirte
Teilbarkeit		16 Lehrschrirte

- 1.3. Das Lehrprogramm zielt auf kognitive Information, d. h. die Bearbeitung der einzelnen Programmteile soll bestimmte Begriffe, Kenntnisse und Fertigkeiten vermitteln.

Die Mehrzahl der nachfolgend beschriebenen Lehrschrirte erreicht dies nach der Methode e x e m p l a r i s c h e n Lernens.

1.3.1. Teil I: Zahlssysteme I

Zahlssysteme, Zahlssymbole, Zahl (nat. Zahl) - Potenz, Basis, Exponent, Koeffizient - Potenz mit dem Exponenten null

ist gleich eins - Aufbau eines Zahlensystems - grafische und numerische Potenzdarstellung einer Zahl - dieselbe Zahl ist in jedes Zahlensystem übertragbar - sämtliche Koeffizienten sind kleiner als die Basis - Erhöhung nicht gegebener Basen, Exponenten und Koeffizienten - grafische Potenzdarstellungen einer Zahl

1.3.2. Teil 2: Zahlsymbole I

Darstellung einer Zahl in Zahlsymbolen - Koeffizienten als Ziffern, Exponenten als Stellen - vom Zahlsymbol zur Potenzdarstellung - Summe der Koeffizienten minimal - für jedes Zahlsymbol gilt ein bestimmtes Zahlensystem - Darstellung einer Zahl durch verschiedene Potenzfolgen - Stellenwert und Ziffernwert - die Null als Platzhalter - Darstellung von Potenzen mit den Exponenten eins und null - Ziffern in verschiedenen Zahlensystemen

1.3.3. Teil 3: Zahlssysteme II

Jede Zahl ist in Potenzen mit Exponent null zerlegbar - Bedeutung von Exponenten und Koeffizienten - Verwendung größtmöglicher Potenzen - die Summe der Koeffizienten ist minimal - die Summe der Exponenten ist maximal - Darstellung einer Zahl in mehreren Zahlensystemen - Basis größer als Koeffizienten - gesucht Exponenten und Koeffizienten bei gegebener Basis - welche Exponenten und Koeffizienten bei gegebener Basis sind möglich

1.3.4. Teil 4: Zahlsymbole II

Ableitung eines Zahlsymbols - Vergleich von Anzahlen - verschiedene Zahlsymbole geben dieselbe Zahl wieder - den Ziffern sind Stellen zugeordnet und umgekehrt - die Exponenten fallen von links nach rechts um je eins - kleinste bzw. größte Zahlen mit dreistelligem Zahlsymbol - Verhältnis von Zahl, Zahlensystem und Zahlsymbol - die

Summe der Koeffizienten soll minimal sein - Zahlen und
Zahlsymbole - Zuordnung von Zahlsymbolen

1.3.5. Teil 5: Zählvorgang

Regelmäßigkeit bei Zählreihen - bestimmte Zahlsymbole
in bestimmten Zahlssystemen - die Vielfachen der Basis -
je weniger Ziffern je Zahlssystem, desto mehr Ziffern je
Zahlsymbol - einstellige Zahlsymbole - Zahlsymbole von
10 bis 20 - Potenzdarstellungen von Zählreihen - Nach-
folger und Vorgänger - Primzahlen - Unterschied zwischen
1 und 10 - Anzahl mehrstelliger Zahlsymbole - Quadrat-
zahlen - Ableitung von Zahlsymbolen - die geraden Zahlen
von 11 bis 22

1.3.6. Teil 6: Einmaleins

1x1 von 4 auf Basis 5 - 1x1 bis 10x10 auf Basis 4, 3, 2 -
1x1 von 1, 3, 5, 7, 9, 11 auf Basis 2, 4, 6, 8, 10, 12 -
1x1 auf Basis 2, 3, 4, 5, 6 besteht aus 4, 9, 16, 25, 36
Gleichungen - 1x1 von 10, 5, 2 auf Basis 10, 5, 2 - das
kleine und große 1x1 auf Basis 3 - 1x1 von 6, 5, 4, 3, 2
auf Basis 12, 10, 8, 6, 4 - 1x1 von 8, 10, 12 auf Basis 12 -
1x1 von 4, 3, 2 auf Basis 5, 4, 3 - Quadratzahlen auf der
Basis 8 - Ergänzung gegebener Einmaleinsreihen - Ergänzung
des großen 1x1 auf Basis 3, 4, 5, 6

1.3.7. Teil 7: Operationen

Addieren auf Basis 3, 5, 8, 12 - Addieren mittels Viel-
systemblöcken - Subtrahieren von Zahlen, deren Ziffern
sich nur an einer Stelle unterscheiden - Subtrahieren mit
Vielsystemblöcken - Addieren mit und ohne Zehnerübergang -
Subtrahieren von 1, 10, 100, 1000 - Addition mit Subtrak-
tion als Probe - Multiplizieren mit 10 - 2x6 auf Basis
10, 9, 8 - Dividieren mittels Zahlentreppe - Dividieren
auf Basis 4, 8, 12 - schriftliches Multiplizieren - Divi-
dieren durch 2 - Division mit Multiplikation als Probe

1.3.8. Teil 8: Übersetzung

Unterschied von Zahl und Zahlssymbol - dieselbe Zahl in verschiedenen Zahlssystemen - Übersetzung nach Basis 10 - je kleiner die Basis, desto größer das Zahlssymbol - verschiedene Zahlssymbole für dieselbe Zahl - Übersetzung durch 7hilen - Zwischenschaltung von Basis 10 - die Zahlssymbole 196, 169, 144, 121, 100 - Übersetzung innerhalb der Basen 2, 4, 8 und 3, 9 - fortgesetztes Dividieren - von Basis 10 auf Basis 12 mit Probe - dieselbe Zahl als zweistelliges Zahlssymbol der Basen 3, 4, 5, 6, 7, 8

1.3.9. Teil 9: Bruchzahlen

Potenzen mit negativem Exponenten - Komma bei Systembrüchen - dieselbe Bruchzahl als gemeiner Bruch - das Kürzen von Brüchen - Umrechnung gemeiner Brüche in Systembrüche - Multiplikation und Division mit 10 - einstellige Zähler und Nenner - Vergleich gemeiner Brüche - reinperiodische Systembrüche - abbrechende Systembrüche - gemeine Brüche zwischen null und eins - Addition und Subtraktion gemeiner Brüche - Übersetzung innerhalb der Basen 8, 4, 2 und 9, 3 - Umformen von Systembrüchen in gemeine Brüche

1.3.10. Teil 10: Teilbarkeit

Teilbarkeit bei bestimmten Endziffern - Teilbarkeit durch die Basis - Teilbarkeit durch 10, 100, 1000 - Teilbarkeit durch die Teiler der Basis - Teilbarkeit der Potenzen der Basen 6 und 12 - Teilbarkeit bei bestimmten Quersummen - Teilbarkeit durch 2 auf Basis 3 - Teilbarkeit durch 9 auf Basis 10 und durch 4 auf Basis 5 - Teilbarkeit durch 2 und 3 auf Basis 7 - Quersummenregel für Teilbarkeit durch 11 auf Basis 12 - Teilbarkeit durch 9 und 3 auf Basis 10 - Teilbarkeit durch 2, 3, 4, 5 auf Basis 7, 9, 11

- 1.4. Die Terminologie des Lehrprogramms bestimmt sich nach folgenden Grundsätzen, die sich gegenseitig einschränken, aber auch ergänzen:

Einheitlichkeit: Die Termini der einschlägigen Literatur scheinen keineswegs einheitlich oder endgültig festgelegt. Da das Lehrprogramm aber zum Verständnis der sachlichen Zusammenhänge, nicht zum Überblick über alle irgendwo verwendeten Ausdrücke verhelfen will, wurde Einheitlichkeit in der Terminologie angestrebt.

Verständlichkeit: Das Lehrprogramm wendet sich an angehende oder den Beruf bereits ausübende Lehrer, nicht etwa an Studierende der Mathematik. Um es entsprechend gut lesbar zu machen, wurden möglichst wenige Fachtermini verwendet, gelegentlich allerdings auch solche, die zwar gebräuchlich, aber nicht durchwegs üblich sind.

Verwendbarkeit: Die auch in der Literatur oft unrichtig gebrauchten Termini (z. B. Polynom) wurden richtig verwendet oder ganz umgangen. Auch das Bestreben, eigene Begriffsbildungen zu vermeiden und von der Mathematik zur Verfügung gestellte Ausdrücke zu benützen, dient der besseren Verwendbarkeit des Lehrprogramms.

- 1.5. Durch die im folgenden zusammenhängend genannten Termini soll kein Ersatz einer Begriffskonkordanz geschaffen werden. Es wird lediglich gezeigt, wie viele unterschiedliche Ausdrücke in der Literatur vorkommen und welche davon schließlich für das Lehrprogramm ausgewählt wurden:

Ründelung - Einteilung - Aufteilung - Anordnung - Zerlegung -
Zusammenfassung - Gliederung - E r s e t z u n g -
Gruppierung - Systematisierung

Die Ausdrücke Diagramm und Polynom wurden vermieden; es wird statt dessen von der grafischen und der numerischen Potenzdarstellung einer Zahl gesprochen.

Positionssystem - Ziffernsystem - Zahlbezeichnungssystem -
Z a h l s y s t e m - Stellenwertsystem

Bei den letzten Versionen des Lehrprogramms ist nur noch von Zahlen (Kardinalzahlen), nicht mehr von Mengen und deren Elementen die Rede; die Auswertung der ersten Entwürfe hatte gezeigt, daß das Thema häufig als "Mengenlehre" mißverstanden worden war.

Die Bezeichnungen Bündel oder Bündelungen erster, zweiter usw. Art, Stufe, Ordnung wurden nicht verwendet, ebensowenig die Termini Bündelbündel, doppelte Bündel, Zweifachbündel, gebündelte Bündel; es wird auch nicht von nullter, erster, zweiter Potenz gesprochen, sondern von Potenzen mit den Exponenten null, eins, zwei; die Ausdrücke Stufeneinheit, Stufenzahl, Bündelstufe, Rangeschwelle wurden vermieden.

Symbolisierung - Codierung - Repräsentation - Verzifferung -
Numeration - Notation : Darstellung einer Zahl durch ein
Zehlsymbol in einem Zahlensystem.

Statt von Aufbau, Umfang und Anzahl von Bündeln oder Bündelungen wird immer von Basis und Exponenten von Potenzen und den Koeffizienten, mit denen diese multipliziert werden, gesprochen, obwohl die Begriffe Bündel und Potenz sich nicht decken; die Ausdrücke Grundzahl, Hochzahl und Vorzahl wurden nicht verwendet.

Vollständige Potenzdarstellung - Normaldarstellung - sparsame Gruppierung - Endstufe der Bündelung : Darstellung

einer Zahl in Potenzen, wobei die Summe der Koeffizienten minimal ist.

Es wird durchgehend vom Zahlssystem auf der Basis zwei bzw. zehn, nicht vom Zweier- oder Zehnersystem, dyadischen oder dekadischen System, Dual- oder Dezimalsystem gesprochen.

Statt der Bezeichnungen Dezimalzahl oder Dezimalbruch wird der für alle Zahlssysteme verwendbare Ausdruck Systembruch verwendet.

Zahlzeichen - Z a h l s y m b o l - Ziffernprotokoll - Zifferndarstellung - Ziffernfolge - Ziffernkombination : Zahlssymbole im engeren Sinn sind Ziffern, Zahlssymbole im weiteren Sinn sind Ziffernfolgen.

Statt Äquivalenter oder gleichmächtiger oder gleichwertiger Bündelungen heißt es im allgemeinen: Dieselbe Zahl ist in verschiedenen Potenzfolgen derselben Basis dargestellt.

2. Programmgestaltung

2.1. Das Lehrprogramm ist in Buchform gehalten. Jedem seiner zehn Teile ist das gesamte Inhaltsverzeichnis vorangestellt. Dadurch soll dem Bearbeiter eine bessere Übersicht ermöglicht werden.

Der untere Abschnitt jedes Lehrschrittes kann abgetrennt werden. Zusammengekommen ergeben diese Abschnitte das Lösungsheft des Lehrprogramms.

Flußdiagramme brauchten nicht beigegeben zu werden, da das

Lehrprogramm ausschließlich linear verläuft und auch keine Sprungelemente für schnelleres Vorankommen enthält; jeder Lehrschritt soll zum Teil neuen Lehrinhalt bringen.

Auf Übungslehrschritte, die jeweils vorhergehenden Lehrinhalt zusammenfassen, konnte verzichtet werden, da fast alle Lehrschritte Begriffe, Kenntnisse und Fertigkeiten aus bereits durcharbeiteten Lehrschritten voraussetzen, diese aber damit zugleich wiederholen.

Einführende oder abschließende Basistexte erwiesen sich für das negebene mathematische Thema als schwer zu erstellen. Sie blieben entweder kurz und wenig aufschlußreich oder sie wurden recht unhandlich. An ihrer Stelle könnte die Programmbeschreibung (1.3.1. bis 1.3.10.) verwendet werden.

Zur Bearbeitung des Lehrprogramms wird nur ein Schreibgerät benötigt. Weitere Hilfsmittel sind nicht erforderlich. Die Antworten oder Lösungen können an den dafür vorgesehenen Stellen im Lehrprogramm oder, bei dessen Wiederverwendung, auch in ein Heft eingetragen werden.

Zum Photokopieren des Lehrprogramms mußte getöntes Papier verwendet werden, da die hektografierten Vorlagen auf weißem Papier einen sehr unsauberen Grauton hinterließen.

2.2. Der Gestaltung einzelner Lehrschritte liegen u. a. folgende Erwägungen zugrunde:

Potenzdarstellungen von Zahlen werden nach Möglichkeit in grafischer und numerischer Weise vorgenommen. Tatsächliche Anschauung und mathematischer bzw. sprachlicher Ausdruck wechseln sich ab und ergänzen sich gegenseitig. Nur auf diese Weise ist volles Verständnis gesichert.

Allgemeine mathematische Darstellungen wurden mit Absicht vermieden. Es sollte ein leicht fassbares Lehrprogramm entstehen, das nach der Methode exemplarischen Lernens ausschließlich mit konkreten Beispielen arbeitet.

Die Anschauungsmittel und die Arbeitsformen wechseln ständig. Beides soll dem besseren Verständnis und der gründlicheren Aneignung dienen.

Es ist grundsätzlich nicht nötig, wenn auch wünschenswert, daß jede Frage innerhalb des Lehrprogramms beantwortet und daß jede Aufgabe gelöst wird. Es genügt, wenn gelegentlich einzelne Lehrschritte nur bearbeitet, die Antworten oder Lösungen aber dann einfach übernommen werden. Ein nachträgliches Verständnis allerdings sollte versucht werden.

Das Lehrprogramm ist lediglich in seinem äußeren Ablauf linear, inhaltlich aber sehr komplex. Es erwies sich als unmöglich, einen rein linearen Gedankenverlauf zu konstruieren. So deckt also ein Lehrschritt immer einen begrenzten Teil des gesamten Lehrinhalts ab und überschneidet sich mit einer Reihe anderer, vorhergehender und nachfolgender, Lehrschritte.

2.3. Das Lehrprogramm erfordert mehrere verschiedenartige Verhaltensweisen oder Arbeitsformen:

Ergänzen unvollständiger Aussagen, unvollständiger grafischer und numerischer Darstellungen.

Einsetzen fehlender Wörter oder Satzteile, fehlender Ziffern oder Ziffernfolgen, fehlender Operationszeichen.

Auswählen richtiger oder falscher Aussagen, richtiger oder falscher grafischer und numerischer Darstellungen.

Kennzeichnen (ankreuzen, unterstreichen, ausstreichen usw.) richtiger oder falscher Zahlsymbole.

Formulieren freier Antworten zu gegebenen Fragestellungen.

Vergleichen freier Antworten mit angegebenen Wahlantworten.

Grafisches Darstellen bestimmter logischer Abhängigkeiten.

Übertragen grafischer in numerische und numerischer in grafische Darstellungen.

Zuordnen von Zahlsymbolen und grafischen bzw. numerischen Potenzdarstellungen.

Beschreiben und Einprägen bestimmter angegebener Verfahren.

Auffinden anderer als bestimmter gegebener Ausdrucksweisen.

Fortsetzen angegebener Zahlenfolgen mit bestimmten Ziffern.

Ableiten verschiedener Zahlsymbole aus grafischen oder numerischen Potenzdarstellungen.

2.4. Die Programmgestaltung der vorliegenden vierten Version des Lehrprogramms wurde wesentlich durch die Programmerprobung der vorhergehenden Versionen beeinflusst.

Die vier Versionen des Lehrprogramms bestehen aus 67, 104, 131, 129 Lehrschritten. Von den Lehrschritten der ersten Version erscheinen in der vierten Version allerdings nur noch 32, von denen aber wiederum nicht ein einziger in der ursprünglichen Form erhalten geblieben ist.

35 Lehrschritte der ersten Version werden somit schließlich auch inhaltlich nicht mehr verwendet, ebenso wenig wie eine erhebliche Anzahl weiterer Lehrschritte, die in der zweiten

und dritten Version zunächst eingefügt, nach der jeweiligen Programmierprobe aber wieder entfernt wurden.

Dagegen blieben 97 neu entworfene Lehrschritte der zweiten und dritten Version wenigstens inhaltlich erhalten, so daß das Lehrprogramm jetzt insgesamt 129 Lehrschritte enthält.

Aus nur vier Teilthemen der ersten Version (Zahlssysteme und Zahlssymbole, Zählvorgang, Operationen, Übersetzung), die entweder allzu breit und umständlich oder aber sehr konzentriert und somit schwierig waren (55, 4, 4, 4 Lehrschritte), ergaben sich schließlich die zehn in ihrem Umfang ausgewogenen Teilthemen der letzten Version, wie sie in der Programmbeschreibung (1.2.) dargestellt sind.

Im Verlauf der allmählichen Programmgestaltung wurden aber nicht nur sehr viele Lehrschritte vollkommen herausgenommen, es mußten auch die jeweils verbleibenden vielfach umgestellt und anders angeordnet, zumindest aber immer wieder abgeändert und verbessert werden.

Neu gestaltet wurden grafische oder numerische Darstellungen, ebenso wie die Formen von Frage und Antwort, gestellter Aufgabe und geforderter Lösung, so daß von jedem der 129 vorliegenden Lehrschritte zwei bis vier oder noch mehr Versionen entstanden, wie das Beispiel der folgenden Seiten zeigt.

Es wurden nach Möglichkeit auch alle unverständlichen, ungründlichen, ungenauen oder gar unrichtigen Ausdrucksweisen ausgeschaltet, vor allem aber wurde die zunächst stark auseinanderklaffende Schwierigkeit der einzelnen Lehrschritte ausgeglichen und einem mittleren Grad angenähert, der von den das Lehrprogramm erprobenden Studierenden als ihrer Leistungsfähigkeit angemessen empfunden wurde.

256	64	16	4	1/16	1/64
44	43	42	41	4-1	4-3

Jede der beiden Potenzfolgen enthält eine Leerstelle. Ergänzen Sie die fehlenden Werte!

16	4	1	1/4	1/16
42	41	40	4-1	4-2

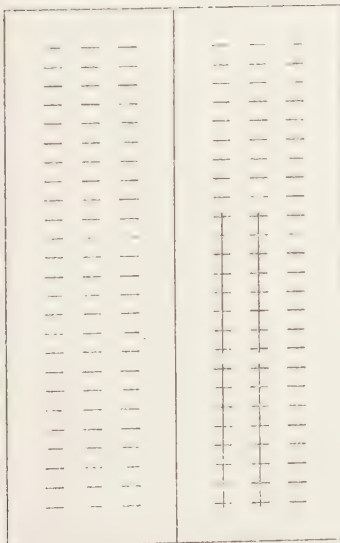
4. Version

2. Version

8	4	2	1	1/2	1/4
23	22	21	20	2-1	2-2
64		4		1/4	
	42		40		4-2
	64		1		1/64

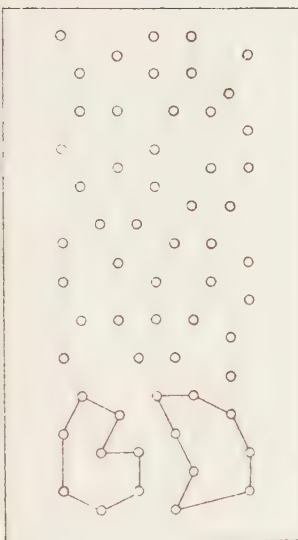
Potenzen mit dem Exponenten null entsprechen dem Wert eins: Ergänzen Sie die beiden Darstellungen!

64	16	4	1	1/4	1/16
43	42	41	40	4-1	4-2
512	64	8	:	1/8	1/64
83	62	61	60	8-1	8-2



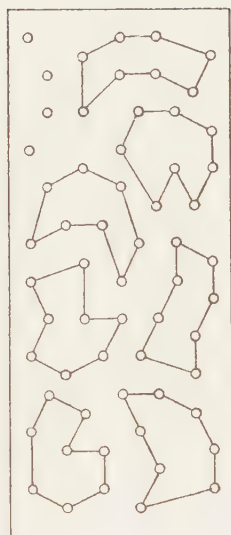
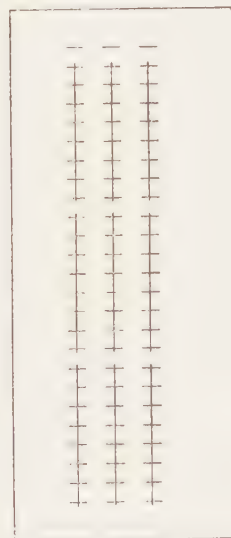
3. Version

"Größere Zahlen sind unübersichtlich, werden aber dadurch übersichtlicher und erfassbar. daß man sie nach einem bestimmten System ordnet. Setzen Sie die angefangene Darstellung fort."



4. Version

"Größere Zahlen zu erfassen und festzustellen ist schwierig, kann jedoch dadurch erleichtert werden, daß man nach einem bestimmten System ordnet. Ergänzen Sie die begonnene Darstellung!"





Alle Zahlen lassen sich durch alle Zahlensysteme erfassen, da sie letztlich immer in Potenzen mit dem Exponenten ☐ zerlegbar sind.

5. Version

2. Version

	BASIS 3	BASIS 7	BASIS 12
5	$3 + 2 + 1$	$1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$1 + 1 + 1 + 1 + 1$
37	$27 + 9 + 1$	$7 + 7 + 7 + 7 + 7$	$12 + 12 + 12 + 12 + 12$
148	$81 + 27 + 27 + 9 + 3 + 1$	$49 + 49 + 49 + 49 + 49 + 49 + 49 + 49$	$144 + 144 + 144 + 144 + 144 + 144 + 144 + 144$

Jede Zahl ist nach Potenzen jeder Basis darstellbar.
 (a) weil jede Zahl schließlich in Einsen darzustellen ist.
 (b) weil die Basis immer kleiner ist als die darzustellende Zahl.

(a) Richtig! Die Tabelle zeigt, dass "eins" Potenz jeder Basis sein kann.

(b) Die Basis kann offenbar auch größer sein als die darzustellende Zahl.

Alle Zahlen lassen sich durch alle Zahlensysteme erfassen, da sie letztlich immer in Potenzen mit dem Exponenten ☐ zerlegbar sind.



 $1_{(3)}$	 $2_{(3)}$	 $10_{(3)}$
 $1^1_{(3)}$	 $1^2_{(3)}$	 $20_{(3)}$

3. Version

Das Dreiersystem verwendet die Ziffern 0, 1, 2.
Setzen Sie die Darstellung der Zahlenfolge fort!



 $2^1_{(3)}$	 $2^2_{(3)}$	 $100_{(3)}$



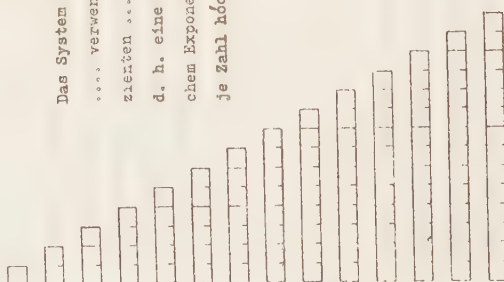
 $1_{(3)}$	 $2_{(3)}$	 $10_{(3)}$
 $1^1_{(3)}$	 $1^2_{(3)}$	 $20_{(3)}$

Das Dreiersystem verwendet die Ziffern 0, 1, 2.
Setzen Sie die Darstellung der Zahlenfolge fort!



 $2^1_{(3)}$	 $2^2_{(3)}$	 $100_{(3)}$

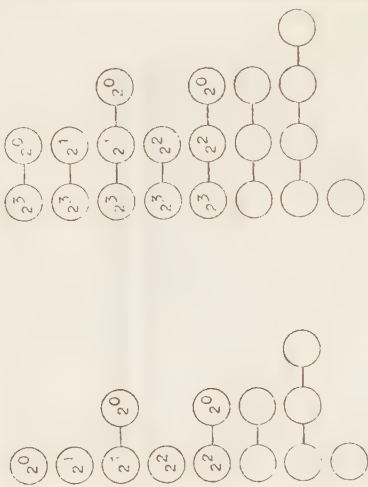
Das System auf der Basis
... verwendet die Koeffi-
zienten ... und ...
d. h. eine Potenz mit glei-
chem Exponenten erscheint
je Zahl höchstens



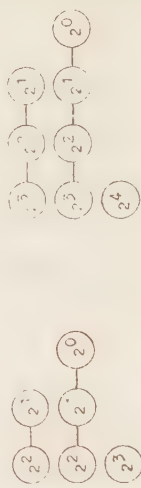
2. Version

3. Version

Jede Zahl ist durch Zweierpotenzen darzustellen,
wobei die gleiche Potenz aber höchstens je einmal
erscheint. Ergänzen Sie die Gegebene Zahlenfolge!



Das System auf der Basis
zwei verwendet die Koeffi-
zienten null und eins,
d. h. eine Potenz mit glei-
chem Exponenten erscheint
je Zahl höchstens einmal.



VERDOPPELN:

$7_{(10)} = 7_{(10)} \cdot 2 = 14_{(10)}$

$7_{(10)} \cdot 2 \cdot 2 = 28_{(10)}$

$7_{(10)} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 56_{(10)}$

(a) Da im Zehnersystem durch Anfügen einer 0 verzehnfacht wird,

(b) Da jede Zweierpotenz durch Multiplizieren mit zwei den nächsthöheren Exponenten erhält,

(c) Da die Ziffernfolge lediglich um eine Stelle nach links gerückt wird,

wird im Zweiersystem durch Anfügen einer 0 verdoppelt.

Eine der Aussagen (a), (b), (c) kann als Begründung gelten!

Das Zweifache von $11_{(2)}$ ist

das Vierfache von $11_{(2)}$ ist

das Achtfache von $11_{(2)}$ ist

weil

3. Version

1. Version

Als Begründung kann nur (b) gelten; (c) ist Folge, (a) lediglich Analogie.

Das Zweifache von $11_{(2)}$ ist $110_{(2)}$,

das Vierfache von $11_{(2)}$ ist $1100_{(2)}$,

das Achtfache von $11_{(2)}$ ist $11000_{(2)}$,

weil jede Zweierpotenz bei Verdopplung den nächsthöheren Exponenten erhält.



$(222)_{\text{drei}}$	$\longrightarrow$	$(\quad)_{\text{fünf}}$
	$\nearrow$	$(\quad)$
$(312)_{\text{fünf}}$	$\longrightarrow$	$(\quad)_{\text{acht}}$
	$\nearrow$	$(\quad)$
Versuchen Sie, die gegebenen Zähsymbole von einem Zahlssystem in das andere zu übersetzen!		

3. Version



$(222)_{\text{drei}}$	$\longrightarrow$	$(26)_{\text{zehn}}$	$\longrightarrow$	$(101)_{\text{fünf}}$
$(312)_{\text{fünf}}$	$\longrightarrow$	$(82)_{\text{zehn}}$	$\longrightarrow$	$(122)_{\text{acht}}$



$[144]_8$	$\longrightarrow$	$[\quad]_9$
$[144]_8$	$\longrightarrow$	$[\quad]_9$
$[121]_{11}$	$\longrightarrow$	$[\quad]_{12}$
$[121]_{11}$	$\longrightarrow$	$[\quad]_{12}$
Versuchen Sie, die gegebenen Zähsymbole mit und ohne Zwischenschaltung des Zehnersystems umzurechnen!		

4. Version



$[144]_8$	$\longrightarrow$	$[100]_{10}$	$\longrightarrow$	$[121]_9$
$[121]_{11}$	$\longrightarrow$	$[144]_{10}$	$\longrightarrow$	$[100]_{12}$

Um eine Zahl von Basis zehn auf eine andere Basis umzurechnen, wird sie durch diese bis zum Ergebnis null geteilt. Die Reste ergeben die neuen Ziffern.

2 2 3 7 8
(10)

2 2 3 7 8 : 12 = 1864 R 2
1864 : 12 = 155 R 4
... : 12 = . R .
... : 12 = . R .
... : 12 = . R .

(12)

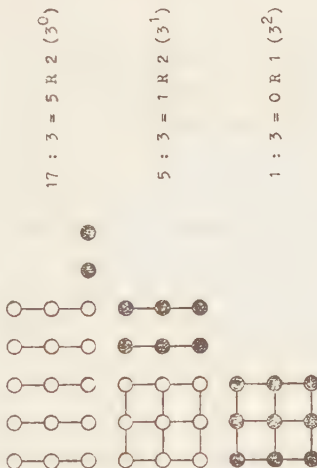
2. Version

4. Version

2 2 3 7 8 : 12 = 1864 R 2
1864 : 12 = 155 R 4
155 : 12 = 12 R 11
12 : 12 = 1 R 0
1 : 12 = 0 R 1

1 0 E 4 2
(12)

Beschreiben Sie das vorgeführte Verfahren, von Basis zehn auf Basis drei umzurechnen!



$[1\ 7]_{\text{zehn}} = [1\ 2\ 2]_{\text{drei}}$

Es wird wiederholt durch drei geteilt. Die Reste ergeben Potenzen auf der Basis drei!

2.5. Auch von den Studierenden, die das Lehrprogramm in seiner ersten, zweiten und dritten Version erprobten, kamen für die Programmgestaltung oft nützliche Hinweise.

Die Teilnehmer eines Seminars "Mathematik im Programmierten Unterricht" wurden nach entsprechender fachlicher und methodischer Unterweisung aufgefordert, einzelne Aussagen zum Thema "Zahlssysteme und Zahlensymbole" als Lehrschritte eines Lehrprogramms zu gestalten, etwa den Satz "das kleinste Einmaleins in einem bestimmten Zahlensystem ist umso umfangreicher, je größer die Basis dieses Zahlensystems ist".

Dabei mußte allerdings festgestellt werden, daß diese Form studentischer Mitarbeit wenig erziehn, ja enttäuschend, bleibt, wohingegen der folgende Versuch, die Lehrtauglichkeit des Lehrprogramms zu verbessern, zwar ungewöhnlich, aber doch sehr aufschlußreich war.

Eine Gruppe von Studierenden, die das Lehrprogramm nicht kannte, erhielt die einzelnen Lehrschritte über das Epidiaskon vermittelt. Die Konfrontation mit den Fragen und Aufgaben erfolgte also nicht in Einzelarbeit, wie sonst bei Lehrprogrammen üblich, sondern frontal.

Auf diese Weise waren über die didaktische Richtigkeit und Angemessenheit einzelner Lehrschritte von den Studierenden zahlreiche Hinweise zu erhalten, die bei der üblichen Probierübung verhorren geblieben waren. Vor allem aber konnte der Verfasser selbst, durch die Möglichkeit eines erläuternden Kommentars, eine Reihe didaktischer Mängel erkennen und auch abstellen, die ihm bei der Programmgestaltung, ohne die unmittelbar einwirkende Rückmeldung von Seiten der Studierenden, niemals bewußt geworden waren.

Gute Ergebnisse, also brauchbare Verbesserungsvorschläge, brachte auch die Aufforderung an die Bearbeiter des Lehrprogramms, die einzelnen Lehrschritte mit schriftlichen Bemerkungen zu versehen, dem Programmgestalter somit mitzuteilen, wo Änderungen angebracht sind, wo Überflüssiges besser entfernt oder Notwendiges vermehrt wird. Erst durch diese Hinweise wurde oft deutlich, und zwar über die Feststellung hinaus, ob Aufgaben und Fragen richtig oder falsch gelöst oder beantwortet waren, wo die eigentliche Schwierigkeit im Einzelfall liegt.

Zusätzlich wurden die Studierenden gebeten, den Grad der subjektiv empfundenen Schwierigkeit bei jedem Lehrschritt zu beurteilen, und zwar nach der Skala "zu leicht, leicht, angemessen, schwer, zu schwer", eine Einschätzung, die ebenfalls zur weiteren Gestaltung des Lehrprogramms beitrug.

Schließlich wurde auch Schlußkritik geführt, also Stellung genommen zur Frage der Brauchbarkeit des gesamten Lehrprogramms. Einige Beurteilungen der e r s t e n Version seien hier als Beispiele angeführt:

"Es tut mir leid, daß ich die meisten Aufgaben nicht lösen kann. Zur Bearbeitung dieses Lehrprogramms gehört aber die spezielle Kenntnis von den Zahlssystemen und ihrer Anwendung. Ich habe früher nie etwas davon gehört und beherrsche es folglich nicht, trotz großer Mühe."

"Im großen und ganzen sind die Lehrschritte ganz gut. Zum größten Teil entsprechen sie meiner Leistungsfähigkeit. Am Schluß bedarf es sehr großer Konzentration. Auch sind ein paar selbstverständliche Dinge enthalten."

"Der Schwierigkeitsgrad variiert innerhalb der Fragen ziemlich stark. Die grafischen Aufgaben sind meist schwieriger

als die rein begrifflichen. Das Zurückblättern sollte gestattet werden, da sich die Begriffe nicht beim erstmaligen Kennenlernen fest einprägen. Dadurch, daß man gelegentlich in die Irre geführt wird, wird man bei anderen Fragen unsicher und vermutet weitere Fallen. Das Gesamtprogramm ist für Studenten vom richtigen Schwierigkeitsgrad."

"Das Programm ist manchmal zu leicht, manchmal unverständlich. Ich kann mir nicht vorstellen, daß man sich auf diese Weise weiterbilden kann."

"Die Aufgaben erfordern größtenteils ein großes Konzentrationsvermögen. Es handelt sich jedoch sehr oft nur darum, die gebrauchten Begriffe (Potenz, Basis, Exponent usw.) gut zu beherrschen. Mathematisch werden keine übermäßigen Leistungen gefordert. Die Fragen könnten ohne weiteres von einem interessierten Gymnasialisten (16) beantwortet werden."

"Meiner Meinung nach ist dieser Test im Grunde nachahmenswert, aber er ist einfach zu umfangreich."

"Es tut mir leid, daß Sie von meiner Arbeit nicht profitieren können. Das liegt daran, daß ich einfach zu wenig mathematisches Verständnis habe und nicht tief genug in diese Materie eindringen kann."

3. Programmprobe

- 3.1. Das Lehrprogramm soll der Information angehenden oder den Beruf bereits ausübender Lehrer dienen. Dementsprechend wurde es Studierenden verschiedener Trimester (1 - 9) des Erziehungswissenschaftlichen Fachbereichs der Universität Augsburg zur Erprobung vorgelegt.

Diese Programmerrprobung fand innerhalb mehrerer Seminare im Fach Didaktik der Mathematik statt, wobei die drei ersten Versionen von 95, 60 und 22 Studierenden bearbeitet wurden. Die vorerlebte vierte Version wurde einer Erprobung noch nicht unterzogen.

Die genannten Seminare, die wöchentlich einmal abgehalten wurden, waren einstündig, nahmen aber volle Rücksicht auf die unterschiedlichen Arbeitszeiten der einzelnen Teilnehmer, 45 Minuten konnten also beliebig unter- oder überschritten werden. Insgesamt wurden so zur Erprobung der dritten Version des Lehrprogramms zehn Wochen, mehr als ein Trimester, benötigt.

Die verschiedenen Versionen des Lehrprogramms wurden auf Matrizen übertragen und vervielfältigt (Din A 4). Da sie aus 67, 104 und 131 Lehrschritten bestanden, mußten bei der angegebenen Teilnehmerzahl fast 15000 bearbeitete Lehrschriffe auswertet werden.

Die Einzeldaten wurden zunächst auf Ablochlisten, dann auf Lochkarten übertragen und in ein zur Erprobung von Lehrprogrammen erstelltes Rechnerprogramm der Zentralstelle für Programmierete Unterweisung am Erziehungswissenschaftlichen Fachbereich der Universität Augsburg eingegeben.

Die im folgenden dargestellten Ergebnisse dieser Programmerrprobung beziehen sich ausschließlich auf die dritte Version des Lehrprogramms. Für die vorerlebte vierte Version können sie nur beschränkt gelten, weil dort weitere Änderungen vorgenommen wurden. Sicher ist, daß jede neue Erprobung neue Verbesserungen zur Folge hat. Das optimale, nicht mehr zu korrigierende Lehrprogramm wird nur selten erreicht.

3.2. Auch der dritten Version des Lehrprogramms wurde für jedes Teilthema eine Arbeitsanweisung beigefügt:

Lesen Sie bitte diese Arbeitsanweisung genau durch, bevor Sie den folgenden Teil des Lehrprogramms bearbeiten!

Es handelt sich um die dritte Version eines Lehrprogramms über Zahlssysteme und Zahlensymbole für Studierende.

Das Lehrprogramm enthält zehn Teile und 131 Lehrschrirte. Das Deckblatt zeigt, welcher Teil bearbeitet wird.

Das Lehrprogramm verläuft linear. Man kann Seite für Seite lesen und braucht keinen Lehrschrirte zu überspringen.

Decken Sie den unteren Teil jeder Seite jeweils mit diesem Blatt ab! Lesen Sie dort erst nach, wenn Sie eine Antwort oder Lösung zu finden wirklich versucht hatten!

Tragen Sie Antworten oder Lösungen wirklich ein, damit die Lehrtauglichkeit des Lehrprogramms festzustellen ist!

Sollte eine Frage oder Aufgabe zu schwierig sein, dann geben Sie keine Lösung oder Antwort! Vermerken Sie stattdessen, wo die Schwierigkeit für Sie liegt!

Um Wissenslücken zu vermeiden, sollten Sie aber immer versuchen, die gegebene Lösung oder Antwort zu verstehen.

Es ist für die weitere Verbesserung des Lehrprogramms sehr hilfreich, wenn Sie entsprechende Vorschläge machen.

Vorsehen Sie bitte die rechte obere Ecke jeder Seite mit folgender Bewertung: 1 = zu leicht, 2 = leicht, 3 = angemessen, 4 = schwer, 5 = zu schwer!

Vermerken Sie auf dem Deckblatt die für die Bearbeitung des Programnteils benötigte Zeit in Minuten!

Schreiben Sie auf das Deckblatt eine dreistellige Kennziffer, die Sie für alle zehn Programnteile beibehalten!

3.3. Lehrerfolg der zehn Programnteile der dritten Version des Lehrprogramms "Zahlsysteme und Zahlensymbole":

	Mittelwert	Varianz	Streuung
(1) Zahlsysteme I	57,85	274,57	16,57
(2) Zahlensymbole I	62,94	433,76	20,83
(3) Zahlsysteme II	70,83	257,26	16,04
(4) Zahlensymbole II	64,88	392,90	19,82
(5) Zählvorname	69,39	131,96	11,49
(6) Einmal-eins	76,14	254,39	15,95
(7) Operationen	79,22	203,66	14,27
(8) Übersetzung	80,07	256,37	16,01
(9) Bruchzahlen	79,55	205,45	14,33
(10) Teilbarkeit	74,15	189,26	13,76
Gesamtergebnisse	71,93	134,39	11,59

57,85 % der elf Lehrschritte des ersten Programnteils der dritten Version des Lehrprogramms wurden bei der Programm-erprobung von allen 22 Teilnehmern bei einer Standardab-weichung von 16,57 richtig bearbeitet.

71,93 % der 131 Lehrschritte aller zehn Programnteile der dritten Version des Lehrprogramms wurden bei der Programm-erprobung von allen 22 Teilnehmern bei einer Standardab-weichung von 11,59 richtig bearbeitet.

Die Bearbeitung der ersten Hälfte des Lehrprogramms war of-fenbar schwieriger als die Bearbeitung der zweiten Hälfte.

3.4. Lehrerfolg der 131 einzelnen Lehrschritte der dritten Version des Lehrprogramms "Zahlsysteme und Zahlssymbole":

1/1	0,864	2/1	0,909	3/1	0,864	4/1	0,364	5/1	0,864
1/2	0,818	2/2	0,455	3/2	0,955	4/2	0,545	5/2	0,682
1/3	0,864	2/3	0,455	3/3	0,591	4/3	0,864	5/3	0,636
1/4	0,818	2/4	0,682	3/4	0,591	4/4	0,955	5/4	0,864
1/5	0,500	2/5	0,773	3/5	0,909	4/5	0,591	5/5	0,955
1/6	0,818	2/6	0,455	3/6	0,636	4/6	0,364	5/6	0,727
1/7	0,000	2/7	0,591	3/7	0,364	4/7	0,727	5/7	0,500
1/8	0,364	2/8	0,273	3/8	0,909	4/8	0,636	5/8	0,364
1/9	0,964	2/9	0,545	3/9	0,591	4/9	0,727	5/9	0,818
1/10	0,273	2/10	0,727	3/10	0,500	4/10	0,500	5/10	0,682
1/11	0,182	2/11	0,591	3/11	0,727	4/11	0,864	5/11	0,909
1/12		2/12	0,909	3/12	0,364	4/12		5/12	0,455
1/13		2/13	0,818	3/13		4/13		5/13	0,636
1/14		2/14		3/14		4/14		5/14	0,455
1/15		2/15		3/15		4/15		5/15	0,455
1/16		2/16		3/16		4/16		5/16	
6/1	0,818	7/1	0,909	8/1	0,682	9/1	0,773	10/1	0,864
6/2	0,955	7/2	0,682	8/2	0,818	9/2	1,000	10/2	0,636
6/3	0,864	7/3	1,000	8/3	1,000	9/3	1,000	10/3	0,500
6/4	1,000	7/4	0,773	8/4	0,955	9/4	1,000	10/4	0,909
6/5	0,318	7/5	0,318	8/5	0,955	9/5	0,682	10/5	0,864
6/6	0,364	7/6	0,955	8/6	0,545	9/6	0,636	10/6	0,773
6/7	1,000	7/7	0,909	8/7	0,818	9/7	0,864	10/7	0,682
6/8	0,455	7/8	0,818	8/8	0,955	9/8	0,727	10/8	0,727
6/9	0,864	7/9	1,000	8/9	0,727	9/9	0,636	10/9	0,727
6/10	0,864	7/10	0,955	8/10	1,000	9/10	1,000	10/10	0,545
6/11	0,409	7/11	0,545	8/11	0,409	9/11	0,682	10/11	0,909
6/12	0,727	7/12	0,500	8/12	0,727	9/12	0,364	10/12	0,773
6/13		7/13	0,909	8/13	0,818	9/13	0,773	10/13	0,909
6/14		7/14	0,818	8/14		9/14	1,000	10/14	0,864
6/15		7/15		8/15		9/15		10/15	0,591
6/16		7/16		8/16		9/16		10/16	0,591

Der Lehrschritt 1/1 wurde bei der Programmerröbung der dritten Version des Lehrprogramms von 86,4 % aller 22 Teilnehmer richtig gelöst. Manche Lehrschritte wurden von allen richtig, ein einziger von allen falsch beantwortet.

3.5. Fernerfolg aller 22 Teilnehmer bei der Erprobung der dritten Version des Lehrprogramms "Zahlssysteme und Zahlssymbole":

	1	2	3	4	5	6
(1) Zahlssysteme I	9,09	51,57	33,33	67,61	63,64	61,87
(2) Zahlssymbole I	38,46	10,91	18,18	66,67	68,63	74,80
(3) Zahlssysteme II	58,33	86,67	66,67	81,67	73,33	80,00
(4) Zahlssymbole II	36,36	54,55	36,36	31,32	66,67	72,73
(5) Zahlvorgang	60,00	83,33	60,00	66,67	60,00	66,67
(6) Einmal-eins	75,00	60,00	66,67	81,67	81,67	100,00
(7) Operationen	71,43	71,50	42,86	66,67	82,26	88,46
(8) Übersetzung	61,54	34,62	18,18	62,50	64,51	100,00
(9) Bruchzahlen	57,14	71,43	50,00	100,00	71,43	61,54
(10) Teilbarkeit	62,50	61,73	66,67	62,50	60,00	66,67
Gesamtergebnisse	54,20	61,00	51,67	61,67	66,73	73,10

	7	8	9	10	11	12	13	14
(1)	45,45	63,64	72,73	63,64	64,52	36,36	58,59	63,64
(2)	92,31	53,85	68,23	81,82	61,54	81,67	82,26	61,54
(3)	66,67	75,00	91,67	66,67	66,67	66,67	73,33	63,33
(4)	63,64	63,64	81,82	66,67	66,67	65,45	81,82	64,56
(5)	73,33	66,67	80,00	66,67	66,67	60,00	80,00	66,67
(6)	83,33	66,67	100,00	66,67	66,67	58,33	75,00	66,67
(7)	78,57	71,43	100,00	66,67	78,57	57,14	100,00	64,29
(8)	84,62	84,62	76,92	64,62	61,67	61,54	100,00	100,00
(9)	100,00	92,86	85,71	66,67	67,64	78,57	78,57	66,67
(10)	37,50	75,00	87,50	66,67	75,00	61,54	61,25	66,67
Gesamtergebnisse	68,62	71,76	84,77	73,67	67,94	66,49	83,81	70,47

	15	16	17	18	19	20	21	22
(11)	72,73	54,55	72,73	81,82	36,36	72,73	7,27	72,73
(12)	76,92	76,92	61,54	81,82	53,85	76,92	86,32	69,23
(13)	83,33	75,10	83,33	83,33	50,00	75,00	75,00	75,00
(14)	81,82	81,82	9,09	81,82	16,46	72,73	81,82	60,61
(15)	73,33	66,67	60,00	96,67	60,00	81,00	80,00	80,00
(16)	100,00	66,67	50,00	83,33	58,33	75,00	87,33	66,67
(17)	92,86	92,86	64,29	85,71	64,29	78,57	78,57	58,37
(18)	92,31	100,00	61,54	84,62	53,85	76,92	94,62	69,23
(19)	100,00	85,71	92,86	85,71	57,14	78,57	78,57	78,57
(10)	81,25	62,50	93,75	87,50	62,50	81,25	87,50	75,00
	85,50	76,34	66,41	84,73	54,96	77,10	80,92	73,28

Bei der Erprobung der dritten Version des Lehrprogramms beantwortete der erste von 22 Teilnehmern 9,09 % der elf Lehrschritte des ersten Programnteils und 54,20 % der 131 Lehrschritte aller zehn Programnteile richtig.

Mit 9,09 % richtig beantworteter Lehrschritte eines Programnteils erzielten zwei Teilnehmer die schlechtesten Teilergebnisse. Dennoch wurden 100 % aller Lehrschritte eines einzelnen Programnteils insgesamt vierzehnmal richtig gelöst.

Das schlechteste Gesamtergebnis hatte der dritte Teilnehmer, der nur 41,98 % aller Lehrschritte richtig beantwortete, gegenüber der fünfzehnte Teilnehmer, bei dem 84,40 % der Lösungen richtig waren, den besten Gesamterfolg erreichte.

3.6. Bei der Erprobung des Lehrprogramms wurden alle Teilnehmer auch um eine subjektive Beurteilung des Schwierigkeitsgrades jedes einzelnen Lehrschritts gebeten, und zwar jeweils nach dem Bewertungsmaßstab "1 = zu leicht, 2 = leicht, 3 = angemessen, 4 = schwer, 5 = zu schwer".

	Mittelwert	Streuung	Varianz
(1) Zahlssysteme I	35,64/3,24	4,93	24,34
(2) Zahlsymbole I	44,00/3,38	6,70	44,86
(3) Zahlssysteme II	36,59/3,05	5,69	32,35
(4) Zahlsymbole II	36,00/3,27	5,07	25,71
(5) Zählvorgang	43,95/2,93	9,56	91,40
(6) Einmal-eins	36,95/3,08	5,74	32,90
(7) Operationen	41,55/2,97	4,67	21,78
(8) Übersetzung	35,23/2,71	6,07	36,85
(9) Bruchzahlen	40,09/2,86	4,99	24,94
(10) Teilbarkeit	38,91/2,43	4,80	23,04

Bei der Erprobung erhielt der erste Programnteil bei einer Streuung von 4,93 eine mittlere Gesamtbewertung von 35,64. Das entspricht einem mittleren Schwierigkeitsgrad von 3,24 je Lehrschritt.

Es zeigte sich, daß die erste Hälfte des Lehrprogramms als schwieriger empfunden wurde als die zweite Hälfte, was der Darstellung in 3.3. gleichkommt. Für alle 131 Lehrschritte errechnete sich ein mittlerer Schwierigkeitsgrad von 2,97. Das Lehrprogramm ist insgesamt der Leistungswilligkeit der Studierenden angemessen.

3.7. Es wurde festgestellt, ob eine Korrelation besteht zwischen dem Urteil über die Schwierigkeit der einzelnen Programmteile und deren tatsächlich erzielttem Lehrerfolg.

	Lehrerfolg	Beurteilung	Korrelation
(1)	6,36	35,64	-0,31
(2)	8,18	44,00	-0,59 s.s.
(3)	8,50	36,59	-0,43 s.
(4)	7,14	36,00	-0,65 s.s.
(5)	10,41	43,95	-0,28
(6)	9,14	36,95	-0,39
(7)	11,09	41,55	-0,48 s.
(8)	10,41	35,23	-0,65 s.s.
(9)	11,14	40,09	-0,54 s.s.
(10)	11,86	38,91	-0,18

Von allen elf Lehrschritten des ersten Programmteils wurden durchschnittlich 6,36 richtig gelöst. Das entspricht den in 3.3. angegebenen 57,85 %.

Die Summe der Schwierigkeitsurteile der Teilnehmer über die Lehrschritte des ersten Programmteils beträgt durchschnittlich 35,64.

Die Korrelation zwischen Schwierigkeitsurteil und Lehrerfolg war bei (1), (5), (6), (10) nicht signifikant, bei (3), (7) signifikant, bei (2), (4), (8), (9) sehr signifikant.

Die Annahme, je schwieriger die Teilnehmer einen Programmteil beurteilten, desto weniger Lehrschritte hätten sie richtig beantwortet, stimmt nur begrenzt.

3.8. Bei der Erprobung der dritten Version des Lehrprogramms wurden die von allen Teilnehmern für die zehn Programmteile benötigten Arbeitszeiten festgestellt.

	Gesamtzeiten	Mittelwert	LZDF
(1) Zahlssysteme I	23 - 39 Min.	30,77/2,80	1,70
(2) Zahlssymbole I	27 - 50 Min.	37,41/2,88	1,85
(3) Zahlssysteme II	23 - 40 Min.	29,82/2,49	1,74
(4) Zahlssymbole II	27 - 42 Min.	33,55/3,05	1,56
(5) Zählvorgang	35 - 60 Min.	45,14/3,01	1,71
(6) Einmal-eins	30 - 50 Min.	38,55/3,21	1,67
(7) Operationen	30 - 65 Min.	40,00/2,86	2,17
(8) Übersetzung	22 - 45 Min.	32,82/2,52	2,05
(9) Bruchzahlen	30 - 50 Min.	39,68/2,83	1,67
(10) Teilbarkeit	25 - 43 Min.	34,55/2,16	1,72
	296-430 Min.	362,3/2,77	1,45

Der erste Programmteil erforderte Arbeitszeiten von 23 Minuten bis 39 Minuten bei dem Mittelwert von 30,77 Minuten, was einer Durchschnittszeit von 2,80 Minuten je Lehrschritt entspricht. Der Lernzeitdifferenzierungsfaktor beträgt 1,70.

Für das gesamte Lehrprogramm wurden Arbeitszeiten von 4 Std. 56 Min. bis 7 Std. 10 Min. benötigt bei einer Durchschnittszeit von 6 Std. 2,3 Min. Das ergibt je Lehrschritt 2,77 Min. Der Lernzeitdifferenzierungsfaktor, durch den das Verhältnis längste/kürzeste Arbeitszeit angegeben ist, beträgt 1,45.

4. Programmbewertung

- 4.1. Die vierte Version des Lehrprogramms "Zahlssysteme und Zahlensymbole" wurde einer Programmerprobung, die einzelne Lehrschritte nochmals analysiert und revidiert hätte, nicht mehr unterzogen. Statt dessen wurde in einer Programmbewertung mittels Vor- und Nachtest festgestellt, welcher Lernfortschritt durch die Bearbeitung des Lehrprogramms eingetreten war.

Vor- und Nachtest waren identisch und wurden eine Woche vor bzw. nach Bearbeitung des Lehrprogramms durchgeführt. Sie bestanden aus zehn in ihrer Schwierigkeit sehr unterschiedlichen Aufgaben, wovon je eine sich auf einen der zehn Programmteile bezog.

Am Vortest nahmen 96, am Nachtest jedoch nur 79 Bearbeiter der vierten Version des Lehrprogramms teil. Ausgewertet wurden deshalb nur die Tests dieser 79 Teilnehmer, was die Korrektur von etwa 1600 Aufgaben erforderte. Beim Nachtest war es nicht möglich, Teile des Lehrprogramms nochmals einzusehen.

Die Programmbewertung wurde vorgenommen, obwohl hier ein sich selbst prüfendes Lehrprogramm vorliegt, obwohl also fast jeder Lehrschritt Begriffe, Kenntnisse und Fertigkeiten aus bereits bearbeiteten Lehrschritten voraussetzt und deren Lehrtauglichkeit somit überprüft.

- 4.2. Zum Vor- bzw. Nachtest wurden den Studierenden die folgenden Erläuterungen gegeben:

Dieser freiwillige Vor- bzw. Nachtest soll es ermöglichen, Ihren Lernfortschritt festzustellen.

Dieser entspricht der Differenz ihrer Wissensbestände vor und nach Bearbeitung des Lehrprogramms.

Vor- und Nachtest sind gleich. Sie enthalten jeweils zehn Fragen unterschiedlicher Schwierigkeit.

Es handelt sich dabei um kein Examen. Es ist also sinnlos, nicht von Ihnen selbst stammende Antworten zu geben.

Tragen Sie bei Vor- und Nachtest in das bezeichnete Feld die gleiche Ziffernfolge als Kennzeichen ein!

Am schwarzen Brett können Sie später Ihren Lernfortschritt und Ihren Rang innerhalb der Gruppe ablesen.

Der Test wird ohne Zeitbegrenzung bearbeitet, da er einen reinen Kapazitätstest darstellen soll.

Die Aufgaben bzw. Lösungen werden nicht gewichtet, sondern mit je einem Punkt bewertet.

Geben Sie die Tests mit oder ohne Antworten auf jeden Fall nach der Bearbeitung wieder ab!

4.3. Fragen und Aufgaben für Vor- und Nachtest zum Lehrprogramm "Zahlssysteme und Zahlensymbole":

- (1) Dieselbe Zahl wird durch verschiedene Potenzen einer Basis dargestellt. Geben Sie jene Darstellung an, bei der alle Koeffizienten kleiner sind als die Basis!

$$3 \cdot 5^2 + 8 \cdot 5^1 + 6 \cdot 5^0$$

$$4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 6 \cdot 5^0$$

- (2) Das Dezimalsystem verwendet lediglich zehn verschiedene Ziffern, kann damit aber alle Zahlen darstellen. Suchen Sie dafür eine Erklärung!

- (3) Die Zahl "siebzehn" läßt sich durch verschiedene Potenzen verschiedener Basen darstellen. Wie viele Potenzen der Basen drei bzw. vier können dies maximal sein?

$$\text{z. B.} \quad \begin{aligned} & 3 \cdot 3^1 + 8 \cdot 3^0 \\ & 2 \cdot 4^1 + 9 \cdot 4^0 \end{aligned}$$

- (4) Geben Sie in den genannten Zahlssystemen die kleinsten bzw. größten Zahlen mit dreistelligem Zahlensymbol an!

$$\begin{array}{lll} (100)_{10} & (\quad)_5 & (\quad)_2 \\ (999)_{10} & (\quad)_5 & (\quad)_2 \end{array}$$

- (5) Schreiben Sie in den Zahlssystemen der Basen drei, fünf und zehn alle Zahlensymbole zwischen 10 und 20!

$$\begin{array}{llll} 10 & .. & .. & 20 \\ 10 & .. & .. & .. & 20 \\ 10 & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & 20 \end{array}$$

- (6) Schreiben Sie das "kleine Einmaleins", das in den verschiedenen Zahlssystemen jeweils die Gleichungen $1 \cdot 1 = 1$ bis $10 \cdot 10 = 100$ umfaßt, auf der Basis drei!

$$\begin{array}{lll} 1 \cdot 1 = 1 & & \\ & \cdot 2 = 11 & \\ & & 11 \cdot 11 = 100 \end{array}$$

- (7) Dividieren Sie in den Zahlssystemen der gegebenen Basen!

$$\begin{array}{ll} 50 : 23 = (\text{sechs}) & 55 : 11 = (\text{fünf}) \\ 45 : 8 = (\text{sechs}) & 60 : 10 = (\text{zweif}) \end{array}$$

- (8) Suchen Sie eine Zahl, deren Zahlsymbol in den Zahlssystemen der Basen drei und neun zweistellig ist!
- (9) Ein gemeiner Bruch wird dadurch gekürzt, daß man Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl teilt:

$$4/14_{(\text{sechs})} = /_{(\text{sechs})}$$

$$4/14_{(\text{zwölf})} = /_{(\text{zwölf})}$$

- (10) Eine Zahl ist durch zwei (drei, vier) teilbar, wenn die Quersumme ihres Zahlsymbols auf Basis neun durch acht teilbar ist. Streichen Sie die nicht zutreffenden Zahlwörter!

4.4. Antworten und Lösungen für Vor- und Nachtest zum Lehrprogramm "Zahlssysteme und Zahlsymbole":

$$() \quad 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0$$

- (1) Das Dezimalsystem verwendet nicht nur zehn verschiedene Ziffern, sondern auch deren Stellenwert. Damit kann es alle Potenzen der Basis zehn angeben.

- (3) Es können maximal je siebzehn Potenzen der Basen drei oder vier mit dem Exponenten null sein.

$$\begin{array}{lll} (100)_{10} & (100)_5 & (100)_2 \\ (999)_{10} & (444)_5 & (111)_2 \end{array}$$

- (5) 10 11 12 20 (drei)
 10 11 12 13 14 20 (fünf)
 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 (zehn)

$$\begin{array}{lll}
 (6) & 1 \cdot 1 = 1 & 1 \cdot 2 = 2 & 1 \cdot 10 = 10 \\
 & 2 \cdot 1 = 2 & 2 \cdot 2 = 11 & 2 \cdot 10 = 20 \\
 & 10 \cdot 1 = 10 & 10 \cdot 2 = 20 & 10 \cdot 10 = 100
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 (7) & 50 : 23 = 2 \text{ (sechs)} & 55 : 11 = 5 \text{ (zwölf)} \\
 & 43 : 13 = 3 \text{ (sechs)} & 60 : 16 = 4 \text{ (zwölf)}
 \end{array}$$

(8) Zahlen, deren Zahlsymbol in den Zahlssystemen der Basen drei und neun zweistellig ist, gibt es nicht.

$$\begin{array}{l}
 (9) \quad 4/14 \text{ (sechs)} = 2/5 \text{ (sechs)} \\
 \quad \quad 4/14 \text{ (zwölf)} = 1/4 \text{ (zwölf)}
 \end{array}$$

(10) Eine Zahl ist nicht in jedem Fall durch drei teilbar, wenn die Quersumme ihres Zahlsymbols im Zahlssystem der Basis neun durch acht teilbar ist.

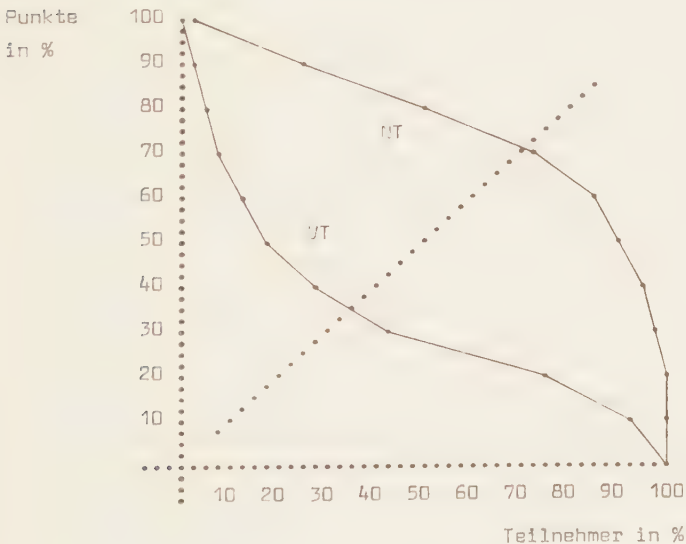
4.5. Lernfortschritt zwischen Vortest und Nachtest zum Lehrprogramm "Zahlssysteme und Zahlsymbole":

Bei der Korrektur wurden Antworten als richtig angesehen, wenn sie den unter 4.4. gegebenen Lösungen inhaltlich entsprachen. Dagegen galten Ergebnisse auch dann als falsch, wenn Einzelteile richtig waren.

Punkte	0	1	2	3	4
VT	6	13	24	14	8
in %	7,59	16,46	30,38	17,72	10,13
NT	0	0	1	3	3
in %	0,00	0,00	1,17	3,80	3,80

5	6	7	8	9	10
5	4	2	2	1	0
6,33	5,06	2,53	2,53	1,27	0,00
4	11	16	22	17	2
5,06	13,92	20,25	27,85	21,52	2,53

Keine richtige Antwort hatten im Vortest sechs, im Nachtest null Teilnehmer. Ausschließlich richtige Lösungen hatten im Vortest null, im Nachtest zwei Teilnehmer.



Das Diagramm zeigt, daß im Vortest etwa 35 % der Bearbeiter etwa 35 % der Fragen, im Nachtest etwas über 70 % der Bearbeiter etwas über 70 % der Fragen richtig lösten.

4.6. Zu geneuerer Feststellung des mittleren Lernfortschritts wurden vier Maße verwendet:

$$\frac{P_{VT}}{P_{MAX}} \cdot 100 = \frac{223}{790} \cdot 100 = 28,23$$

Im Vortest wurden 223 Punkte erreicht. Dies sind 28,23 % der erreichbaren Anzahl von 790 Punkten.

$$\frac{P_{NT}}{P_{MAX}} \cdot 100 = \frac{590}{790} \cdot 100 = 74,68$$

Im Nachtest wurden 590 Punkte erreicht. Das sind 74,68 % der erreichbaren Anzahl von 790 Punkten.

$$\frac{P_{NT} - P_{VT}}{P_{MAX}} \cdot 100 = \frac{367}{790} \cdot 100 = 46,46$$

Unter Abzug des Vorwissens wurden im Nachtest 367 Punkte erreicht. Das ergibt 46,46 % der erreichbaren Anzahl von 790 Punkten.

$$\frac{P_{NT} - P_{VT}}{P_{MAX} - P_{VT}} \cdot 100 = \frac{367}{567} \cdot 100 = 64,73$$

Unter Abzug des Vorwissens wurden im Nachtest 367 Punkte erreicht. Das sind 64,73 % der nach Abzug des Vorwissens erreichbaren Anzahl von 567 Punkten.

Nach SCHIEFELE/HUBER (1966 S. 16) wird für lehrtaugliche Programme gefordert, daß die optimale Lernmöglichkeit zu mindestens 50 % ausgenützt wird.

Z A H L S Y S T E M E U N D Z A H L S Y M B O L E

ZAHLSYSTEME I	1/1 - 1/11
---------------------	------------

ZAHLSYMBOL E I	2/1 - 2/12
----------------------	------------

ZAHLSYSTEME II	3/1 - 3/11
----------------------	------------

ZAHLSYMBOL E II	4/1 - 4/11
-----------------------	------------

"ZÄHLVORGANG	5/1 - 5/15
--------------------	------------

EINMAL EINS	6/1 - 6/12
-------------------	------------

OPERATIONEN	7/1 - 7/14
-------------------	------------

"ÜBERSETZUNG	8/1 - 8/13
--------------------	------------

BRUCHZAHLEN	9/1 - 9/14
-------------------	------------

TEILBARKEIT	10/1 - 10/16
-------------------	--------------

Das folgende Lehrprogramm hat Zahlssysteme sowie Zahlssymbole zum Inhalt, während die Zahl selbst nicht näher betrachtet wird. Wenn trotzdem viel davon die Rede ist, so deshalb, weil Zahlssysteme und Zahlssymbole den Begriff der Zahl voraussetzen.

Nicht beachtet wird somit von der Absicht des Lehrprogramms her gesehen der Begriff

- (a) Binärsystem,
- (b) Neg. Zahlen,
- (c) Stellenwert.

Wählen Sie eine der drei Möglichkeiten!

Unbeachtet bleiben negative Zahlen, da es sich dabei nicht um Zahlssysteme und nicht um Zahlssymbole, sondern um Zahlen handelt!

1/2

8	4	2	1	1/2	1/4
2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}

64		4		1/4	
	4^2		4^0		4^{-2}

	64		1		1/64

Potenzen mit dem Exponenten null
entsprechen dem Wert eins: Ergän-
zen Sie die beiden Darstellungen!

1/2

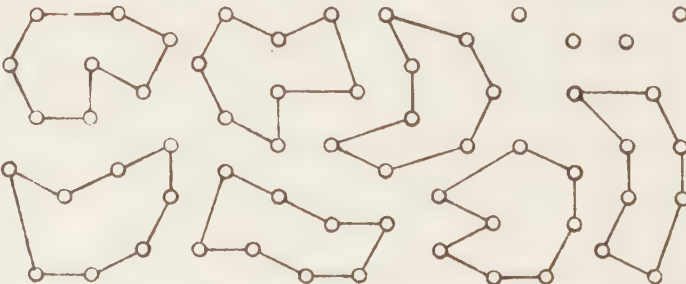
64	16	4	1	1/4	1/16
4^3	4^2	4^1	4^0	4^{-1}	4^{-2}

512	64	8	1	1/8	1/64
8^3	8^2	8^1	8^0	8^{-1}	8^{-2}

1/3



"Größere Zahlen zu erfassen und festzustellen ist schwierig, kann jedoch dadurch erleichtert werden, daß man nach einem bestimmten System ordnet. Ergänzen Sie die begonnene Darstellung!"



1/3

Eine Zahl wird in Potenzen zerlegt: Setzen Sie die Begriffe Basis, Exponent, Koeffizient ein!

$$\begin{array}{c} \boxed{} \\ \boxed{1} \cdot \boxed{3} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{} \\ \boxed{2} \end{array} + \begin{array}{c} \boxed{} \\ \boxed{0} \cdot \boxed{3} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{} \\ \boxed{1} \end{array} + \begin{array}{c} \boxed{} \\ \boxed{2} \cdot \boxed{3} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{} \\ \boxed{0} \end{array}$$

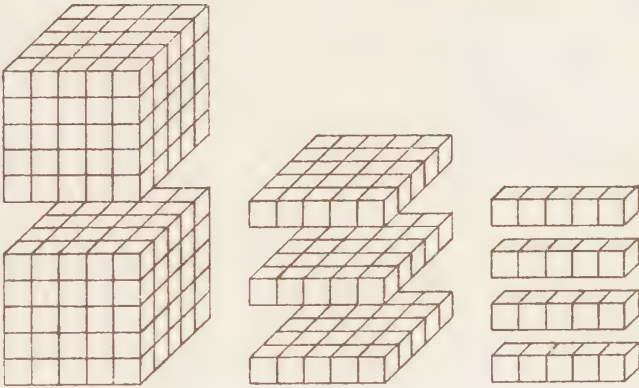
$$\begin{array}{c} \boxed{\text{Koeffizient}} \\ \boxed{1} \cdot \boxed{3} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\text{Exponent}} \\ \boxed{2} \end{array} + \begin{array}{c} \boxed{\text{Koeffizient}} \\ \boxed{0} \cdot \boxed{3} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\text{Exponent}} \\ \boxed{1} \end{array} + \begin{array}{c} \boxed{\text{Koeffizient}} \\ \boxed{2} \cdot \boxed{3} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\text{Exponent}} \\ \boxed{0} \end{array}$$



Im Zahlssystem auf der Basis zwei ergeben
zwei gleiche Potenzen die "nächsthöhere"
Potenz: Setzen Sie die Darstellung fort!



1/6



$$\square \cdot \square \square + \square \cdot \square \square + \square \cdot \square \square$$

Übertragen Sie die gegebene graphische in die numerische Potenzdarstellung derselben Zahl!

1/6

$$\square 2 \cdot \square 5 \square 3 + \square 3 \cdot \square 5 \square 2 + \square 4 \cdot \square 5 \square 1$$

1/7

① 2 4 ⑧ ⑩ 32 64 128 256 512

1 1 3 3 9 9 27 27 81 81 243

1 1 1 1 5 5 5 5 25 25 25 25

1 1 1 1 1 1 1 1 8 8 8 8 8 8 8 ..

① 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ⑫ ⑫ ...

Dieselbe Zahl ist in jedes Zahlssystem "übertragbar: Kennzeichnen Sie die entsprechenden Potenzen der Basen drei, fünf und acht!

1/7

① 1 ③ ③ ⑨ ⑨ 27 27 81 81 243

1 1 1 1 5 5 5 5 ⑫ 25 25 25 25

① 1 1 1 1 1 1 ⑥ ⑧ ⑧ 8 8 8 8 ..

1/8

Eine Zahl wird in verschiedene Potenzen derselben Basis zerlegt: Geben Sie die Darstellung an, bei der sämtliche Koeffizienten kleiner sind als die Basis!

$$\begin{aligned}
 & \boxed{23} \cdot \boxed{4}^{\boxed{0}} \\
 & \boxed{1} \cdot \boxed{4}^{\boxed{1}} + \boxed{19} \cdot \boxed{4}^{\boxed{0}} \\
 & \boxed{2} \cdot \boxed{4}^{\boxed{1}} + \boxed{15} \cdot \boxed{4}^{\boxed{0}} \\
 & \boxed{3} \cdot \boxed{4}^{\boxed{1}} + \boxed{11} \cdot \boxed{4}^{\boxed{0}} \\
 & \boxed{4} \cdot \boxed{4}^{\boxed{1}} + \boxed{7} \cdot \boxed{4}^{\boxed{0}} \\
 & \boxed{5} \cdot \boxed{4}^{\boxed{1}} + \boxed{3} \cdot \boxed{4}^{\boxed{0}} \\
 & \boxed{1} \cdot \boxed{4}^{\boxed{2}} + \boxed{0} \cdot \boxed{4}^{\boxed{1}} + \boxed{7} \cdot \boxed{4}^{\boxed{0}} \\
 & \boxed{} \cdot \boxed{}^{} + \boxed{} \cdot \boxed{}^{} + \boxed{} \cdot \boxed{}^{}
 \end{aligned}$$

1/8

$$\boxed{1} \cdot \boxed{4}^{\boxed{2}} + \boxed{1} \cdot \boxed{4}^{\boxed{1}} + \boxed{3} \cdot \boxed{4}^{\boxed{0}}$$

Auf Basis 4 ersetzt eine
Potenz je vier Potenzen:



Auf Basis 3 ersetzt eine
Potenz je drei Potenzen:



Auf Basis 2 ersetzt eine
Potenz je zwei Potenzen:



Auf Basis 1 ersetzt
.....:

Basis 1 wird für ein Zahlssystem nicht verwendet, da hier nur je eine Potenz durch eine andere mit dem höheren Exponenten ersetzt würde!

Verschiedene Zahlen sollen nach verschiedenen Zahlssystemen gegliedert werden: Ergänzen Sie die nicht angegebenen Basen, Exponenten und Koeffizienten!

$$19 = \boxed{2} \cdot \boxed{}^{\boxed{2}} + \boxed{0} \cdot \boxed{}^{\boxed{}} + \boxed{} \cdot \boxed{}^{\boxed{}}$$

$$36 = \boxed{2} \cdot \boxed{}^{\boxed{2}} + \boxed{1} \cdot \boxed{}^{\boxed{}} + \boxed{} \cdot \boxed{}^{\boxed{}}$$

$$41 = \boxed{1} \cdot \boxed{}^{\boxed{2}} + \boxed{0} \cdot \boxed{}^{\boxed{}} + \boxed{} \cdot \boxed{}^{\boxed{}}$$

$$68 = \boxed{0} \cdot \boxed{}^{\boxed{2}} + \boxed{7} \cdot \boxed{}^{\boxed{}} + \boxed{} \cdot \boxed{}^{\boxed{}}$$

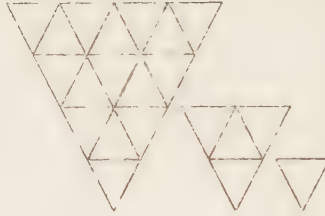
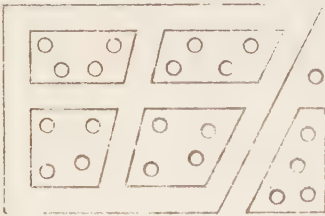
$$19 = \boxed{2} \cdot \boxed{3}^{\boxed{2}} + \boxed{0} \cdot \boxed{3}^{\boxed{1}} + \boxed{1} \cdot \boxed{3}^{\boxed{0}}$$

$$36 = \boxed{2} \cdot \boxed{4}^{\boxed{2}} + \boxed{1} \cdot \boxed{4}^{\boxed{1}} + \boxed{0} \cdot \boxed{4}^{\boxed{0}}$$

$$41 = \boxed{1} \cdot \boxed{6}^{\boxed{2}} + \boxed{0} \cdot \boxed{6}^{\boxed{1}} + \boxed{5} \cdot \boxed{6}^{\boxed{0}}$$

$$68 = \boxed{0} \cdot \boxed{9}^{\boxed{2}} + \boxed{7} \cdot \boxed{9}^{\boxed{1}} + \boxed{5} \cdot \boxed{9}^{\boxed{0}}$$

1/11



Die Gliederung einer Zahl in möglichst wenige Potenzen läßt sich auf verschiedene Art darstellen!



(Beispiel)



(Beispiel)



1/11

Z A H L S Y S T E M E U N D Z A H L S Y M B O L E

ZAHLSYSTEME I 1/1 - 1/11

ZAHLSYMBOL E I 2/1 - 2/12

ZAHLSYSTEME II 3/1 - 3/11

ZAHLSYMBOL E II 4/1 - 4/11

"ZÄHLVORGANG 5/1 - 5/15

EINMAL EINS 6/1 - 6/12

OPERATIONEN 7/1 - 7/14

"ÜBERSETZUNG 8/1 - 8/13

BRUCHZAHLEN 9/1 - 9/14

TEILBARKEIT 10/1 - 10/16

2/1



Dieselbe Zahl wird im "Fünfer- und Zehnersystem dargestellt. Wie heißen die entsprechenden Zahlsymbole?

5^2	5^1	5^0

10^2	10^1	10^0

2/1

5^2	5^1	5^0
	2	2

zwei - zwei
" (Basis fünf)

10^2	10^1	10^0
	1	2

eins - zwei
(Basis zehn)

2/2

$$\boxed{5} \cdot \boxed{8}^{\boxed{3}} + \boxed{1} \cdot \boxed{8}^{\boxed{2}} + \boxed{4} \cdot \boxed{8}^{\boxed{1}} + \boxed{3} \cdot \boxed{8}^{\boxed{0}}$$

5	1	4	3
---	---	---	---

Die Darstellung einer Zahl in einem Zahlssystem kann durch ein Zahlsymbol festgehalten werden. Die Koeffizienten erscheinen dann als Ziffern/Stellen, die Exponenten als Ziffern/Stellen. Streichen Sie jeweils einen der zwei Begriffe!

2/2

Die Darstellung einer Zahl in einem Zahlssystem kann durch ein Zahlsymbol festgehalten werden. Die Koeffizienten erscheinen dann als Ziffern/Stellen, die Exponenten als Ziffern/Stellen.

101_(zwei) : "Eins-null-eins-Basis zwei"

211_(drei) : "Zwei-eins-eins-Basis drei"

413_(fünf) : "Vier-eins-drei-Basis fünf"

952_(zehn) : "Neun-fünf-zwei-Basis zehn"

Für eines der gegebenen Zahlsymbole ist
auch eine andere Ausdrucksweise üblich!

952_(zehn) : "Neunhundertzweiundfünfzig"

2/4



$20_{(3)}$



$12_{(4)}$



$11_{(5)}$



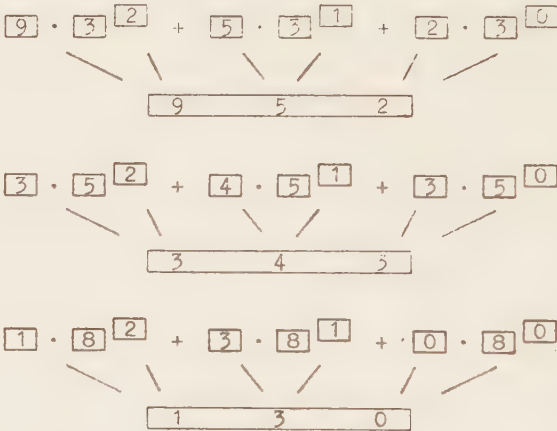
$10_{(6)}$

Gegeben sind Zahlssymbole derselben Zahl
in verschiedenen Zahlssystemen. Zeichnen
Sie die jeweiligen Potenzdarstellungen!

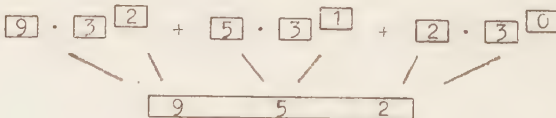


2/4

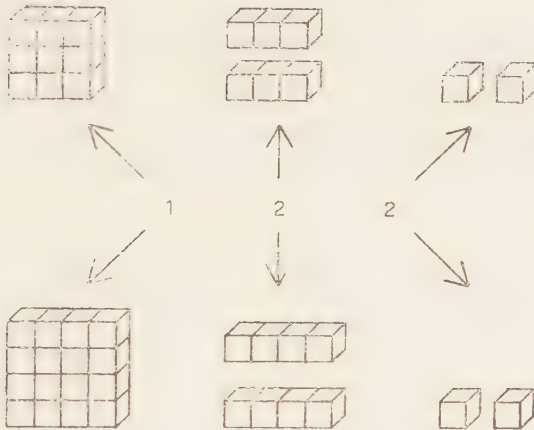




Ziffern sind aus den Potenzdarstellungen einer Zahl abzuleiten, in denen die Summe der Koeffizienten minimal ist : Eines der angegebenen Zahlensymbole ist somit falsch!



2/6



Nur wenn das bekannt ist,
gibt ein durch seine Zif-
fern und Stellen genau eine Zahl an!

2/6

Nur wenn das bekannt ist,
gibt ein durch seine Zif-
fern und Stellen genau eine Zahl an!

2/7

Dieselbe Zahl kann mit verschiedenen Potenzfolgen derselben Basis dargestellt werden: Leiten Sie ein Zahlsymbol aus der Potenzfolge ab, in der die Summe der Koeffizienten minimal ist!

$$1 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4^1 + 9 \cdot 4^0$$

$$1 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4^1 + 5 \cdot 4^0$$

$$2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 5 \cdot 4^0$$

$$2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0$$

$$3 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0$$

$$\boxed{3} \quad \boxed{0} \quad \boxed{1}$$

2/7

S T E L L E N W E R T									
7		5		1				3	
Z I F F E R N W E R T									

Wird eine Zahl durch ein Zahlsymbol dargestellt, dann wird durch angegeben, welche, durch , wieviele Potenzen einer Basis auftreten.

Wird eine Zahl durch ein Zahlsymbol dargestellt, dann wird durch Stellenwert angegeben, welche, durch Ziffernwert, wieviele Potenzen einer Basis auftreten.



1 0 3 2

Die Darstellung einer gegebenen Zahl umfaßt nur drei verschiedene Potenzen, das entsprechende Zahlensymbol aber enthält vier Ziffern. Suchen Sie eine Erklärung!

Die Null zeigt, daß die Potenz 4^2 fehlt, daß die Zahl sich also gliedert in Potenzen mit den Exponenten drei - eins - null!

2/10

Übersetzen Sie folgende Zahlsymbole
in die unten gegebenen Zahlssysteme!

(a) 1 - 2 - 4 - 3 (zehn)

(b) 1 - 3 - 9 - 27 (zehn)

(c) 1 - 5 - 25 - 125 (zehn)

(d) 1 - 9 - 81 - 729 (zehn)

(a) - - - (zwei)

(b) - - - (drei)

(c) - - - (fünf)

(d) - - - (neun)

2/10

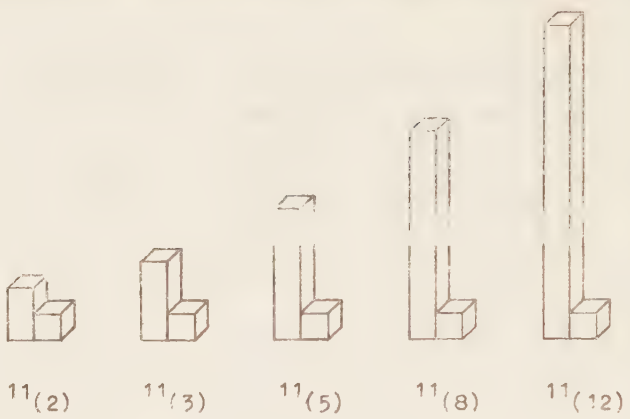
(a) 1 - 10 - 100 - 1000 (zwei)

(b) 1 - 10 - 100 - 1000 (drei)

(c) 1 - 10 - 100 - 1000 (fünf)

(d) 1 - 10 - 100 - 1000 (neun)

2 11



Verschiedene Zahlen sind in verschiedenen Zahlssystemen dargestellt. Die Zahlensymbole sind gleich, da jeweils eine Potenz mit dem Exponenten eins und

..... eine Potenz mit dem Exponenten null wiedergegeben wurden!

2, 11

2/12

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	10	3	3	3	3	3	3	3	3	3
		10	4	4	4	4	4	4	4	4
			10	5	5	5	5	5	5	5
				10	6	6	6	6	6	6
					10	7	7	7	7	7
						10	8	8	8	8
							10	9	9	9
								10	Z	Z
									10	E
										10

Das Zahlssystem auf Basis drei (fünf, acht, zwölf) braucht lediglich drei (fünf, acht, zwölf) Ziffern, da immer drei (fünf, acht, zwölf) gleiche Potenzen

2/12

..... durch eine Potenz
mit dem höheren Exponenten ersetzt werden!

Z A H L S Y S T E M E U N D Z A H L S Y M B O L E

ZAHLSYSTEME I 1/1 - 1/11

ZAHLSYMBOL E I 2/1 - 2/12

ZAHLSYSTEME II 3/1 - 3/11

ZAHLSYMBOL E II 4/1 - 4/11

"ZÄHLVORGANG 5/1 - 5/15

EINMAL EINS 6/1 - 6/12

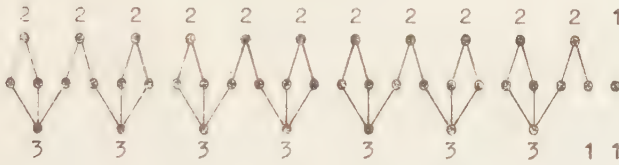
OPERATIONEN 7/1 - 7/14

"ÜBERSETZUNG 8/1 - 8/13

BRUCHZAHLEN 9/1 - 9/14

TEILBARKEIT 10/1 - 10/16

3/1



Alle Zahlen lassen sich durch alle Zahlssysteme erfassen, da sie letztlich immer in Potenzen mit dem Exponenten zerlegbar sind.

3/1

Alle Zahlen lassen sich durch alle Zahlssysteme erfassen, da sie letztlich immer in Potenzen mit dem Exponenten null zerlegbar sind.

3/2



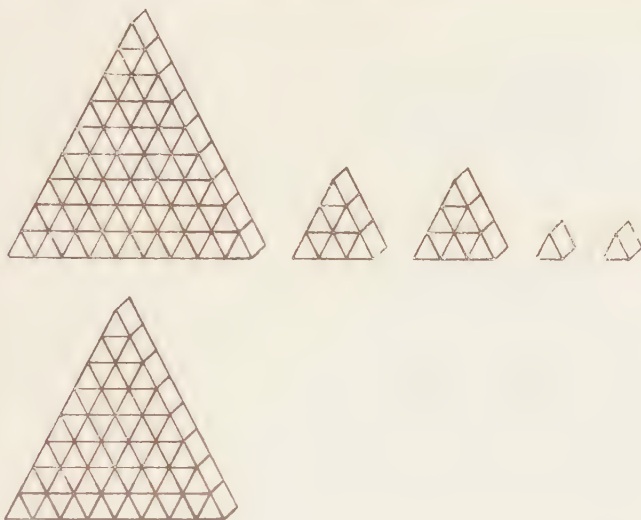
$$1 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 2 \cdot 6^0$$

Dieselbe Zahl wird auf der Basis sechs zweimal dargestellt: Die geben an, um welche, die , um wie viele gleiche Potenzen es sich jeweils handelt.

3/2

Dieselbe Zahl wird auf der Basis sechs zweimal dargestellt: Die Exponenten geben an, um welche, die Koeffizienten, um wie viele gleiche Potenzen es sich jeweils handelt.

3/3



Eine Zahl wird von Basis drei nach Basis vier
übersetzt: Verwenden Sie größtmögliche Potenzen!

3/3



3/4

Dieselbe Zahl wird in Potenzen der Basen 2 - 9 zerlegt. Verbessern Sie die Darstellung, in der die Summe der Koeffizienten nicht minimal ist!

$$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^0$$

$$2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$$

$$1 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0$$

$$2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0$$

$$1 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0$$

$$1 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0$$

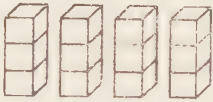
$$1 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0$$

$$7 \cdot 9^1 + 1 \cdot 9^0$$

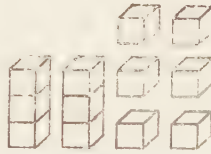
3/4

$$1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

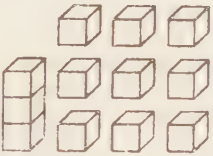
3/5



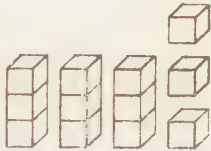
(4)



(8)



(10)

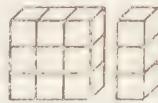


(6)

Dieselbe Zahl wird in verschiedenen Potenzen der Basis drei dargestellt. Wie hoch ist die maximale (minimale) Summe der Koeffizienten?



(12)



(2)

3/5

Eine Zahl wird in verschiedene Potenzen derselben Basis zerlegt: Wenn die Summe der Koeffizienten minimal ist, dann ist immer die Summe der !

$$7 \cdot 2^0$$

$$1 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^0$$

$$2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^0$$

$$3 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Eine Zahl wird in verschiedene Potenzen derselben Basis zerlegt: Wenn die Summe der Koeffizienten minimal ist, dann ist immer die Summe der Exponenten maximal!

3/7



Eine Zahl wird in zwei Zahlensystemen zerlegt, so dass jeweils die Summe der Koeffizienten minimal ist:
Ergeben Sie die Darstellung auf der Basis zwei!

3/7



3/8

$$4 \cdot 5^4 + 5 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 \\ 3 \cdot 5^4 + 9 \cdot 5^3 + 7 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5^1 + 8 \cdot 5^0$$

Ist eine Zahl in möglichst große bzw.
wenige Potenzen einer Basis zerlegt,

(a) dann ist diese Basis immer größer
als sämtliche Koeffizienten!

(b) dann ist diese Basis immer größer
als sämtliche Exponenten!

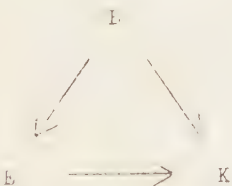
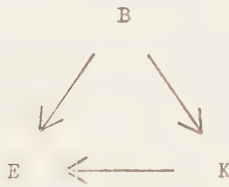
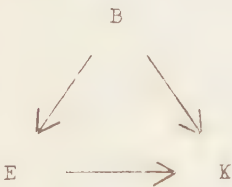
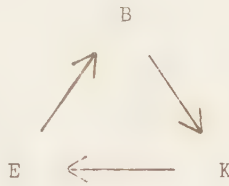
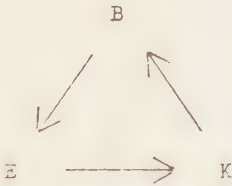
Welche der zwei Folgerungen ist falsch?

3/8

(b) dann ist diese Basis immer größer
als sämtliche Exponenten!

3/9

Jede Zahl kann in Potenzen zerlegt werden: Entscheiden Sie, welche Form von Abhängigkeit zwischen Basis - Exponenten - Koeffizienten besteht!



Von der Basis "hängt es ab, welche Exponenten, von Basis und Exponenten, welche Koeffizienten nötig sind."

3/9

3/10

Auf den Basen drei, fünf und acht wird die gleiche Zahl so dargestellt, daß sich möglichst wenige Potenzen ergeben: Exponenten und Koeffizienten sollen angegeben werden!

$$\boxed{} \cdot \boxed{3}^{\boxed{}} + \boxed{} \cdot \boxed{3}^{\boxed{}}$$

$$\boxed{} \cdot \boxed{5}^{\boxed{}} + \boxed{} \cdot \boxed{5}^{\boxed{}}$$

$$\boxed{} \cdot \boxed{8}^{\boxed{}} + \boxed{} \cdot \boxed{8}^{\boxed{}}$$

3/10

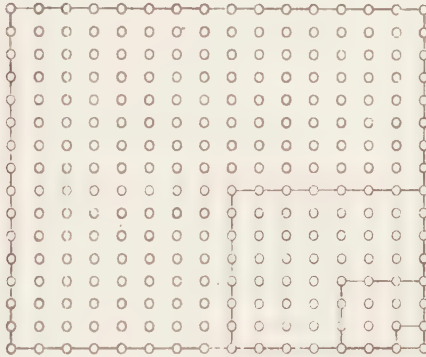
$$\boxed{2} \cdot \boxed{3}^{\boxed{1}} + \boxed{2} \cdot \boxed{3}^{\boxed{0}}$$

$$\boxed{1} \cdot \boxed{5}^{\boxed{1}} + \boxed{2} \cdot \boxed{5}^{\boxed{0}}$$

$$\boxed{1} \cdot \boxed{8}^{\boxed{1}} + \boxed{0} \cdot \boxed{8}^{\boxed{0}}$$

3/11

Welche Koeffizienten, Exponenten und Basen werden verwendet, wenn Zahlen nach folgendem Zahlssystem in Potenzen zerlegt werden?



3/11

Koeffizienten sind die Zahlen von null bis drei, Exponenten die Zahlen von null bis unendlich, Basis ist allein die Zahl vier!

Z A H L S Y S T E M E U N D Z A H L S Y M B O L E

ZAHLSYSTEME I 1/1 - 1/11

ZAHLSYMBOL E I 2/1 - 2/12

ZAHLSYSTEME II 3/1 - 3/11

ZAHLSYMBOL E II 4/1 - 4/11

ZÄH LVORGANG 5/1 - 5/15

EINMAL EINS 6/1 - 6/12

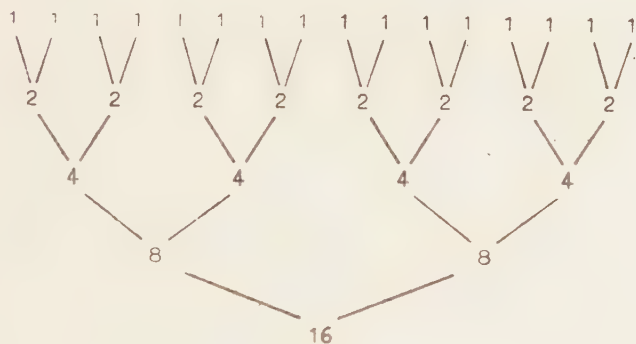
OPERATIONEN 7/1 - 7/14

ÜBERSETZUNG 8/1 - 8/13

BRUCHZAHLEN 9/1 - 9/14

TEILBARKEIT 10/1 - 10/16

4/1



Zerlegen Sie die Zahl "einunddreißig"
in Potenzen der Basis zwei und leiten
Sie ein entsprechendes Zahlensymbol ab!

4/1

$$2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 11111_{(\text{zwei})}$$

$$16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 11111_{(\text{zwei})}$$

Vergleichen Sie die angegebenen Zahlen
und setzen Sie die Zeichen für "größer
als", "kleiner als", "ist gleich" ein!

4_5 3_6 2_7 1_8 0_9

14_5 13_6 12_7 11_8 10_9

104_5 103_6 102_7 101_8 100_9

4_5 $>$ 3_6 $>$ 2_7 $>$ 1_8 $>$ 0_9

14_5 $=$ 13_6 $=$ 12_7 $=$ 11_8 $=$ 10_9

104_5 $<$ 103_6 $<$ 102_7 $<$ 101_8 $<$ 100_9

4/3



1 2 0



2 2 0

Wenn verschiedene Zahlsymbole dieselbe Zahl wiedergeben, dann sind die Basen/Exponenten/Koeffizienten der entsprechenden Potenzdarstellungen verschieden: Unterstreichen Sie!

4/3

Wenn verschiedene Zahlsymbole dieselbe Zahl wiedergeben, dann sind die Basen/Exponenten/Koeffizienten der entsprechenden Potenzdarstellungen (Normaldarstellung) verschieden.

4/4

Begründen Sie die Tatsache, daß ...

$$2 \text{ (10)} = 10 \text{ (2)}$$

$$3 \text{ (10)} = 10 \text{ (3)}$$

$$4 \text{ (10)} = 10 \text{ (4)}$$

$$5 \text{ (10)} = 10 \text{ (5)}$$

$$6 \text{ (10)} = 10 \text{ (6)}$$

$$7 \text{ (10)} = 10 \text{ (7)}$$

$$8 \text{ (10)} = 10 \text{ (8)}$$

$$9 \text{ (10)} = 10 \text{ (9)}$$

4/4

$$2 \cdot 10^0 = 1 \cdot 2^1$$

$$3 \cdot 10^0 = 1 \cdot 3^1$$

$$4 \cdot 10^0 = 1 \cdot 4^1$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

4/5

Die Darstellung einer Zahl in einem Zahlssystem wird durch ein Zahlsymbol festgehalten. Innerhalb dieses Zahlsymbols werden den verschiedenen Ziffern zugeordnet, welche die E x p o n e n t e n aller Potenzen ausdrücken.

Die Darstellung einer Zahl in einem Zahlssystem wird durch ein Zahlsymbol festgehalten. Innerhalb dieses Zahlsymbols werden den verschiedenen Stellen zugeordnet, welche die K o e f f i z i e n t e n aller Potenzen ausdrücken.

4/5

..... werden den verschiedenen Ziffern Stellen zugeordnet,

..... werden den verschiedenen Stellen Ziffern zugeordnet,

$$\begin{array}{c} 1 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 + 3 \cdot 4^2 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 123 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^0 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 132 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2 \cdot 4^0 + 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^2 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 213 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2 \cdot 4^0 + 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 231 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 312 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^0 + 1 \cdot 4^1 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 321 \end{array}$$

Alle Exponenten einer Potenzfolge sollen von links nach rechts um je eins bis null abfallen. Denn ein sollte lediglich ein " für eine Zahl gebrauchen.

Alle Exponenten einer Potenzfolge sollen von links nach rechts um je eins bis null abfallen. Denn ein sollte lediglich ein " für eine Zahl gebrauchen.

4/7

Schreiben Sie in den gegebenen Zahl-
systemen die kleinsten bzw. größten
Zahlen mit dreistelligem Zahlsymbol!

drei drei

sechs sechs

neun neun

"zwölf "zwölf

4/7

100 drei 222 drei

100 sechs 555 sechs

100 neun 888 neun

100 "zwölf 888 "zwölf

4/8

Wenn die gleichen Zahlen durch die gleichen
Zahlsymbole dargestellt werden, dann han-
delt es sich um die gleichen Zahlssysteme.

Wenn die gleichen Zahlen durch verschiedene
Zahlsymbole dargestellt werden, dann han-
delt es sich um verschiedene Zahlssysteme.

Wenn verschiedene Zahlen durch die gleichen
Zahlsymbole dargestellt werden, dann han-
delt es sich um verschiedene Zahlssysteme.

Wenn verschiedene Zahlen durch verschiedene
Zahlsymbole dargestellt werden, dann han-
delt es sich um die gleichen Zahlssysteme.

Eine der vier Behauptungen ist nicht schlüssig!

4/8

Wenn verschiedene Zahlen durch verschiedene
Zahlsymbole dargestellt werden, dann han-
delt es sich um Zahlssysteme.

In diesem Fall ist keine Folgerung zwingend!

4/9

2 2 2 2 (2)

2 2 2 2 (4)

6 6 7 0 (7)

Z Z Z E (E)

Ziffern sind aus den Potenzdarstellungen einer Zahl abzuleiten, in denen die Summe der Koeffizienten minimal ist. Verbessern Sie demzufolge die gegebenen Zahlsymbole!

1 0 0 0 0 (2)

1 0 0 0 0 (4)

1 0 0 0 0 (7)

1 0 0 0 0 (E)

4/9

4/10

Einer der folgenden Ausdrücke bezieht sich nicht auf Zahlen, sondern auf Zahlsymbole!

Produkt ist gleich

kleiner als teilbar

Primzahl vierstellig

addieren minus

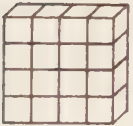
ungerade halbieren

Wurzel aus unendlich

4/10

Nicht eine Zahl, sondern gegebenenfalls ihr Zahlsymbol ist vierstellig!

4/11



Drei Zahlen in drei Zahlssystemen: Ordnen
Sie die Zahlensymbole 1100, 0110, 0011 zu!

0110₍₄₎

0011₍₈₎

1100₍₂₎

4/11

Z A H L S Y S T E M E U N D Z A H L S Y M B O L E

ZAHLSYSTEME I 1/1 - 1/11

ZAHLSYMBOL E I 2/1 - 2/12

ZAHLSYSTEME II 3/1 - 3/11

ZAHLSYMBOL E II 4/1 - 4/11

"ZÄHLVORGANG		5/1 - 5/15
--------------	-------	------------

EINMAL EINS 6/1 - 6/12

OPERATIONEN 7/1 - 7/14

"ÜBERSETZUNG 8/1 - 8/13

BRUCHZAHLEN 9/1 - 9/14

TEILBARKEIT 10/1 - 10/16

5/1

0	0	0	<u>0</u>	0	0	<u>0</u>	0	<u>0</u>
0	0	<u>0</u>	<u>1</u>	0	0	<u>1</u>	0	<u>1</u>
0	0	1	<u>0</u>	0	<u>0</u>	<u>2</u>	0	<u>2</u>
0	<u>0</u>	1	<u>1</u>	0	1	<u>0</u>	0	<u>3</u>
0	1	0	<u>0</u>	0	1	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>4</u>
0	1	<u>0</u>	<u>1</u>	0	<u>1</u>	<u>2</u>	1	<u>0</u>
0	1	1	<u>0</u>	0	2	<u>0</u>	1	<u>1</u>
<u>0</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	0	2	<u>1</u>	1	<u>2</u>
1	0	0		<u>0</u>	<u>2</u>		1	
1	0	<u>0</u>		1	0		<u>1</u>	
1	0			1	0		2	
1	<u>0</u>			1			2	
1				1			2	
1				1			2	

Dieselbe Zahlenfolge wird auf den Basen
zwei, drei und fünf dargestellt. Setzen
Sie alle Ziffernfolgen nach unten fort!

5/1

1	0	0	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>2</u>	<u>2</u>	1	<u>3</u>
1	0	<u>0</u>	<u>1</u>	1	0	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>4</u>
1	0	1	<u>0</u>	1	0	<u>1</u>	2	<u>0</u>
1	<u>0</u>	1	<u>1</u>	1	<u>0</u>	<u>2</u>	2	<u>1</u>
1	1	0	<u>0</u>	1	1	<u>0</u>	2	<u>2</u>
1	1	<u>0</u>	<u>1</u>	1	1	<u>1</u>	2	<u>3</u>
1	1	1	<u>0</u>	1	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>2</u>	<u>4</u>

5/2



$1_{(3)}$



$2_{(3)}$



$10_{(3)}$



$11_{(3)}$



$12_{(3)}$



$20_{(3)}$

Das Dreiersystem verwendet die Ziffern 0-1-2.
Setzen Sie die Darstellung der Zahlenfolge fort!

5/2



$21_{(3)}$



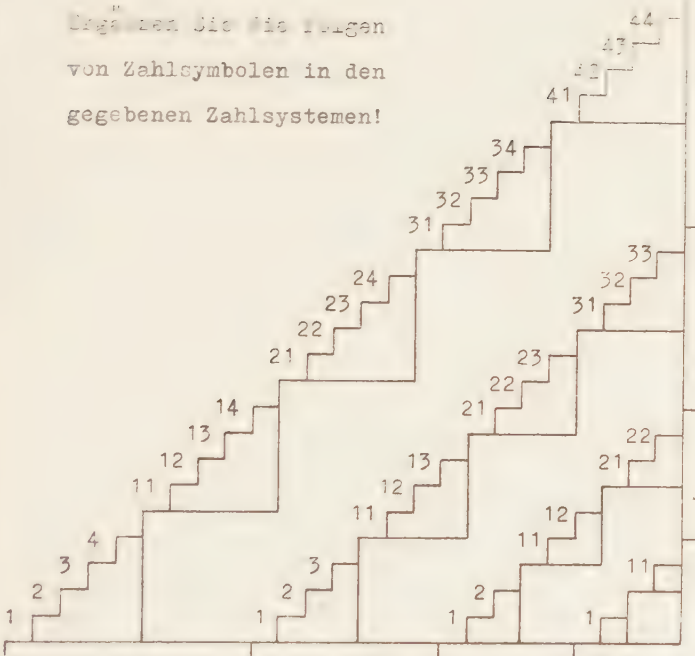
$22_{(3)}$



$100_{(3)}$

5/3

Ergänzen Sie die Folgen
von Zahlsymbolen in den
gegebenen Zahlssystemen!



5/3

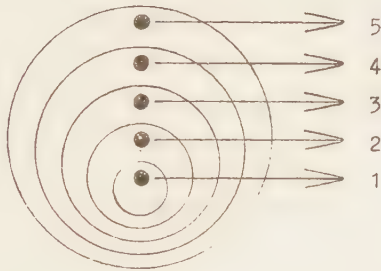
0	-	10	-	20	-	30	-	40	-	100
0	-	10	-	20	-	30	-	100		
		0	-	10	-	20	-	100		
				0	-	10	-	100		

Je weniger Ziffern ein benutzt,
umso mehr Ziffern benötigt ein ,
sobald eine größere dargestellt wird.

1		1		1		1	...	1
10		2		2		2	...	2
11		10		3		3	...	3
100		11		4		4	...	4
101		12		10		5	...	5
110		20		11		6	...	6
111		21		12		7	...	7
1000		22		13		10	...	8
1001		100		14		11	...	9
1010		101		20		12	...	2

Je weniger Ziffern ein benutzt,
umso mehr Ziffern benötigt ein ,
sobald eine größere dargestellt wird.

5/5



Die Zahl umfaßt die Zahlen .

Die Zahl umfaßt die Zahlen .

Die Zahl umfaßt die Zahlen .

Die Zahl umfaßt die Zahlen .

5/5

Die Zahl umfaßt die Zahlen .

Die Zahl umfaßt die Zahlen .

Die Zahl umfaßt die Zahlen .

Die Zahl umfaßt die Zahlen .

5/6

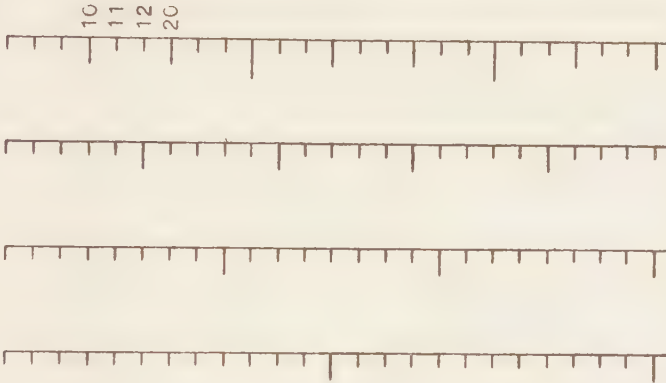
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	10	3	3	3	3	3	3	3	3	3
		10	4	4	4	4	4	4	4	4
			10	5	5	5	5	5	5	5
				10	6	6	6	6	6	6
					10	7	7	7	7	7
						10	8	8	8	8
							10	9	9	9
								10	Z	Z
									10	E
										10

Je größer die Basis eines
ist, desto mehr werden mittels
einstelliger dargestellt.

5/6

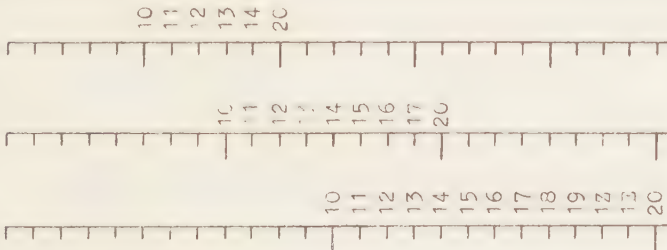
Je größer die Basis eines Zahlsystems
ist, desto mehr Zahlen werden mittels
einstelliger Zahlsymbole dargestellt.

5/7



Gegeben sind die Zahlssysteme der Basen drei,
fünf, acht und zwölf. Es sollen jeweils alle
Zahlsymbole von 10 bis 20 eingesetzt werden!

5/7



5/8

Basis vier			2	0
			2	1
			2	2
			2	3
			3	0
			3	1
			3	2

Basis zwei		

Das "Zählen" kann in jedem Zahlssystem erfolgen:
Gliedern Sie nach Potenzen der Basis zwei und
schreiben Sie die entsprechenden Zahlsymbole!

Basis zwei		1	0	0	0
		1	0	0	1
		1	0	1	0
		1	0	1	1
		1	1	0	0
		1	1	0	1
		1	1	1	0

5/8

5/9

Innerhalb eines Zahlensystems folgen jeweils
ganz bestimmte Zahlensymbole hintereinander!

1101 - - - 1111

1104 - - - 1111

1107 - - - 1111

110Z - - - 1111

5/9

1101 - 1102 - 1110 - 1111

1104 - 1105 - 1110 - 1111

1107 - 1108 - 1110 - 1111

110Z - 110E - 1110 - 1111

5/10

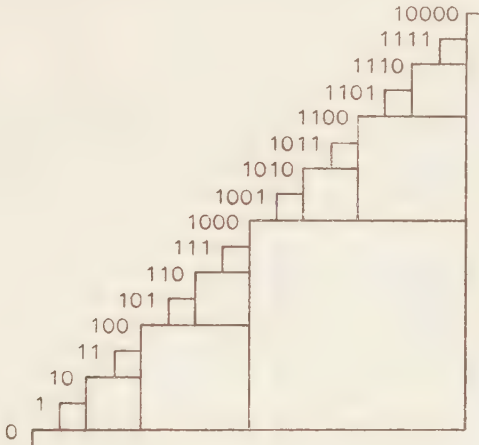
Kennzeichnen Sie alle Zahlsymbole von
Primzahlen in folgenden Zahlssystemen!

1	-	-	-	1	-	-	-	1	-	-	-	1
2	-	-	-	2	-	-	-	2	-	-	-	2
10	-	-	-	3	-	-	-	3	-	-	-	3
11	-	-	-	4	-	-	-	4	-	-	-	4
12	-	-	-	10	-	-	-	5	-	-	-	5
20	-	-	-	11	-	-	-	6	-	-	-	6
21	-	-	-	12	-	-	-	7	-	-	-	7
22	-	-	-	13	-	-	-	10	-	-	-	8
100	-	-	-	14	-	-	-	11	-	-	-	9
101	-	-	-	20	-	-	-	12	-	-	-	Z
102	-	-	-	21	-	-	-	13	-	-	-	E

5/10

2	-	-	-	2	-	-	-	2	-	-	-	2
10	-	-	-	3	-	-	-	3	-	-	-	3
12	-	-	-	10	-	-	-	5	-	-	-	5
21	-	-	-	12	-	-	-	7	-	-	-	7
102	-	-	-	21	-	-	-	13	-	-	-	E

5/11



Im Zahlssystem auf Basis stehen die Zahlensymbole 1 und 10 (11 und 100, 111 und 1000, 1111 und 10000) für Zahlen, deren Unterschied beträgt.

5/11

Im Zahlssystem auf Basis stehen die Zahlensymbole 1 und 10 (11 und 100, 111 und 1000, 1111 und 10000) für Zahlen, deren Unterschied beträgt.

5/12

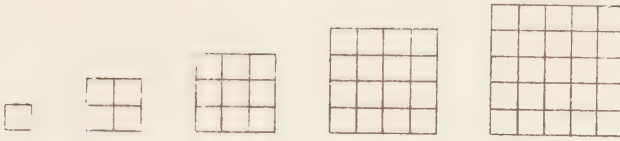
10	10	10	0
11 ₍₂₎	11	11	11
	12	12	12
	20	13	13
	21	20	14
	22 ₍₃₎	21	20
		22	21
		23	22
		30	23
		31	24
		32	30
		33 ₍₄₎	31
			32
			33
			34
			40
			41
			42
			43
			44 ₍₅₎

Wieviel zwei- bzw. dreistellige Zahlsymbole umfassen die gegebenen Zahlssysteme? Antworten Sie mit Zahlsymbolen der betreffenden Zahlssysteme!

5/12

10 ₍₂₎	20 ₍₃₎	30 ₍₄₎	40 ₍₅₎
bzw.	bzw.	bzw.	bzw.
100 ₍₂₎	200 ₍₃₎	300 ₍₄₎	400 ₍₅₎

5/13



	100	1001	10000	11001
1	11	100	121	
1	4		31	100
1	4	11		31
1		9	14	21

Die angegebenen Quadratzahlen werden in verschiedenen Zahlssystemen dargestellt.
Ergänzen Sie die fehlenden Zahlsymbole!

	100	1001	10000	11001
1	11	100	121	
1	4		31	100
1	4	11		31
1		9	14	21

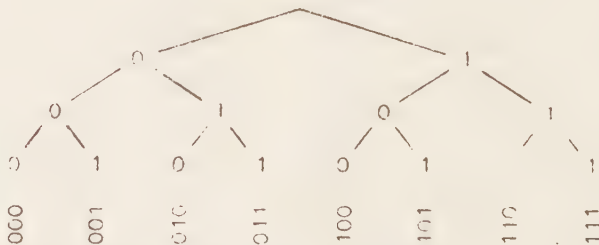
5/13

5/14



Versuchen Sie, die Ableitung der ersten acht
Zahlsymbole auf der Basis zwei darzustellen!

5/14



5/15

Ergänzen Sie die Zahlssymbole aller geraden Zahlen von 11 bis 22 in den angegebenen Zahlssystemen!

11 .. 22

11 22

11 22

11 22

11 22

11 20 22

11 13 20 22

11 13 15 20 22

11 13 15 17 20 22

11 13 15 17 19 20 22

5/15

Z A H L S Y S T E M E U N D Z A H L S Y M B O L E

ZAHLSYSTEME I 1/1 - 1/11

ZAHLSYMBOL E I 2/1 - 2/12

ZAHLSYSTEME II 3/1 - 3/11

ZAHLSYMBOL E II 4/1 - 4/11

"ZÄHLVORGANG 5/1 - 5/15

EINMAL EINS 6/1 - 6/12

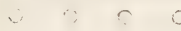
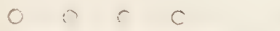
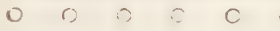
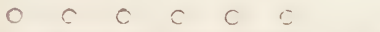
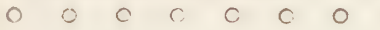
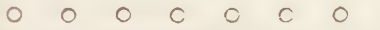
OPERATIONEN 7/1 - 7/14

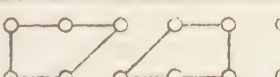
"ÜBERSETZUNG 8/1 - 8/13

BRUCHZAHLEN 9/1 - 9/14

TEILBARKEIT 10/1 - 10/16

6/1

	$1 \cdot 4 = 4$
	
	
	
	
	
	
	
	$10 \cdot 4 = 40$
Das Einmaleins von vier umfaßt die Gleichungen von $1 \cdot 4 = 4$ bis $10 \cdot 4 = 40$. Ergänzen Sie die gegebene Darstellung auf der Basis fünf!	

	$2 \cdot 4 = 8$
	$3 \cdot 4 = 12$
	$4 \cdot 4 = 16$

6/1

6/2

$$\begin{array}{llll} 1 \cdot 1 = 1 & 1 \cdot 2 = 2 & 1 \cdot 3 = 3 & 1 \cdot 10 = 10 \\ 2 \cdot 1 = 2 & 2 \cdot 2 = 10 & 2 \cdot 3 = 12 & 2 \cdot 10 = 20 \\ 3 \cdot 1 = 3 & 3 \cdot 2 = 12 & 3 \cdot 3 = 31 & 3 \cdot 10 = 30 \\ 10 \cdot 1 = 10 & 10 \cdot 2 = 20 & 10 \cdot 3 = 30 & 10 \cdot 10 = 100 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 1 \cdot 1 = 1 & 1 \cdot 2 = 2 & 1 \cdot 10 = 10 \\ 2 \cdot 1 = 2 & 2 \cdot 2 = 11 & 2 \cdot 10 = 20 \\ 10 \cdot 1 = 10 & 10 \cdot 2 = 20 & 10 \cdot 10 = 100 \end{array}$$

Jedes Zahlssystem hat sein eigenes "kleines Einmaleins", das immer die Gleichungen von $1 \cdot 1 = 1$ bis $10 \cdot 10 = 100$ umfaßt. Schreiben Sie das Einmaleins auf der Basis zwei!

6/2

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot 1 = 1 & 1 \cdot 10 = 10 \\ 10 \cdot 1 = 10 & 10 \cdot 10 = 100 \end{array}$$

6/3

Das Einmaleins von 1 (3, 5, 7, 9, E) auf der Basis zwei (vier, sechs, acht, zehn, zwölf): Ergänzen Sie die Ziffernfolgen!

1 ↑	3 ↑	5 ↑	7 ↑	9 ↑	E ↑
↓ 10	12	14	16	18	1Z
	21	23	25	27	29
	↓ 30	32	34	36	38
		41	43	45	47
		↓ ..	..	..	..
			..	..	..
			↓ ..	..	..
				..	..
				↓ ..	..
					..
					↓ ..

6/3

↓ 50 ↑	52 ↑	54 ↑	56 ↑
	61	63	65
	↓ 70	72	74
		81	83
		90	92
			41
			↓ E

6/4

1 10	1 2 10	1 2 3 10
10 100	2 11 20	2 10 12 20
	10 20 100	3 12 21 30
		10 20 30 100
1 2 3 4 5 10		
2 4 10 12 14 20	1 2 3 4 10	
3 10 13 20 23 30	2 4 11 13 20	
4 12 20 24 32 40	3 11 14 22 30	
5 14 23 32 41 50	4 13 22 31 40	
10 20 30 40 50 100	10 20 30 40 100	

Je mehr Ziffern ein Zahlssystem benutzt,
um so größer ist das zugehörige Einmal-
eins: Auf der Basis 2 (3, , ,) um-
faßt es 4 (9, , ,) Gleichungen!

6/4

Je mehr Ziffern ein Zahlssystem benutzt,
um so größer ist das zugehörige Einmal-
eins: Auf der Basis 2 (3, 4, 5, 6) um-
faßt es 4 (9, 16, 25, 36) Gleichungen!

6/5

Das Einmaleins von zehn (fünf, zwei) soll auf Basis zehn (fünf, zwei) angeschrieben werden!

$$\begin{aligned} 1 \cdot 10 &= 10 \\ 2 \cdot 10 &= 20 \\ 3 \cdot 10 &= 30 \\ 4 \cdot 10 &= 40 \\ 5 \cdot 10 &= 50 \\ 6 \cdot 10 &= 60 \\ 7 \cdot 10 &= 70 \\ 8 \cdot 10 &= 80 \\ 9 \cdot 10 &= 90 \\ 10 \cdot 10 &= 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 5 &= 5 \\ 2 \cdot 5 &= 10 \\ 3 \cdot 5 &= 15 \\ 4 \cdot 5 &= 20 \\ 5 \cdot 5 &= 25 \\ 6 \cdot 5 &= 30 \\ 7 \cdot 5 &= 35 \\ 8 \cdot 5 &= 40 \\ 9 \cdot 5 &= 45 \\ 10 \cdot 5 &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 &= 2 \\ 2 \cdot 2 &= 4 \\ 3 \cdot 2 &= 6 \\ 4 \cdot 2 &= 8 \\ 5 \cdot 2 &= 10 \\ 6 \cdot 2 &= 12 \\ 7 \cdot 2 &= 14 \\ 8 \cdot 2 &= 16 \\ 9 \cdot 2 &= 18 \\ 10 \cdot 2 &= 20 \end{aligned}$$

6/5

$$\begin{aligned} 1 \cdot 10 &= 10 & 1 \cdot 10 &= 10 \\ 2 \cdot 10 &= 20 & 10 \cdot 10 &= 100 \\ 3 \cdot 10 &= 30 \\ 4 \cdot 10 &= 40 \\ 10 \cdot 10 &= 100 \end{aligned}$$

6/6

$1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot 2 = 2$	$1 \cdot 10 = 10$
$2 \cdot 1 = 2$	$2 \cdot 2 = 11$	$2 \cdot 10 = 20$
$10 \cdot 1 = 10$	$10 \cdot 2 = 20$	$10 \cdot 10 = 100$
$1 \cdot \quad =$	$1 \cdot \quad =$	$1 \cdot \quad =$
$2 \cdot \quad =$	$2 \cdot \quad =$	$2 \cdot \quad =$
$10 \cdot \quad =$	$10 \cdot \quad =$	$10 \cdot \quad =$

Das "kleine Einmaleins" umfaßt die Gleichungen von $1 \cdot 1 = 1$ bis $10 \cdot 10 = 100$. Schreiben Sie das "große Einmaleins" auf der vorgegebenen Basis!

6/6

$1 \cdot 11 = 11$	$1 \cdot 12 = 12$	$1 \cdot 20 = 2$
$2 \cdot 11 = 22$	$2 \cdot 12 = 101$	$2 \cdot 20 = 11$
$10 \cdot 11 = 110$	$10 \cdot 12 = 120$	$10 \cdot 20 = 100$

6/7

Das Einmaleins von sechs (fünf, vier, drei, zwei, eins) soll auf der Basis zwölf (zehn, acht, sechs, vier, zwei) dargestellt werden.

6 10 16 20 26 30 36 40 46 50 56 60

5 50

4 40

3 30

2 20

1 10

6/7

5 10 15 20 25 30 35 40 45 50

4 10 14 20 24 30 34 40

3 10 13 20 23 30

2 10 12 20

6/8

Ergänzen Sie das Einmaleins von acht,
zehn und zwölf auf der Basis zwölf!

1
2 4
3 6 9
4 8 10 14
5 Z 13 18 21
6 10 16 20 26 30
7 12 19 24 2E 36 41
8 14 20 28 34 40
9 16 23 30 39 46 53 .. 69
Z 18 26 34 42 50
E 1Z 29 38 47 56 65 .. 83 .. Z1
10 20 30 40 50 60

6/8

8 14 20 28 34 40 48 54
60
Z 18 26 34 42 50 5Z 68 76 84
74 92
10 20 30 40 50 60 70 80 90 Z0 E0 100

6/9

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 4 = 4 \\ 2 \cdot 4 = 13 \\ 3 \cdot 4 = 22 \\ 4 \cdot 4 = 31 \\ 10 \cdot 4 = 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 3 = 3 \\ 2 \cdot 3 = 11 \\ 3 \cdot 3 = 14 \\ 4 \cdot 3 = 22 \\ 10 \cdot 3 = 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 2 = 2 \\ 2 \cdot 2 = 4 \\ 3 \cdot 2 = 11 \\ 4 \cdot 2 = 13 \\ 10 \cdot 2 = 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 2 = 2 \\ 2 \cdot 2 = 10 \\ 3 \cdot 2 = 12 \\ 10 \cdot 2 = 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 2 = 2 \\ 2 \cdot 2 = 11 \\ 10 \cdot 2 = 20 \end{array}$$

Das Einmaleins von vier, drei, zwei wurde im
Zahlssystem von fünf, vier, drei dargestellt.

Das Einmaleins von vier, drei, zwei wurde im
Zahlssystem von fünf, vier, drei dargestellt.

Unterstreichen Sie die richtigen Zahlwörter!

6/9

Das Einmaleins von vier, drei, zwei wurde im
Zahlssystem von fünf, vier, drei dargestellt.

Das Einmaleins von vier, drei, zwei wurde im
Zahlssystem von fünf, vier, drei dargestellt.

6/10

	1	2	3	4	5	6	7	10
1		2	3	4	5	6	7	10
2	2		6	10	12	14	16	20
3	3	6		14	17	22	25	30
4	4	10	14		24	30	34	40
5	5	12	17	24		36	43	50
6	6	14	22	30	36		52	60
7	7	16	25	34	43	52		70
10	10	20	30	40	50	60	70	

Wie werden die ersten acht Quadrat-
zahlen im Achtersystem geschrieben?

1 4 11 20 31 44 61 100

6/10

	20	24		40	44		
		31	36		50	55	
			30	36	42	48	
	12	19	24	28			

6/11

Ergänzen Sie die gegebenen Einmaleinsreihen!

	20	24	32	40	44	52	
	24	31	36	43	50	55	
	18	24	30	36	42	48	
	12	19	24	28	35	41	

6/11

6/12

Das "große Einmaleins" in verschiedenen Zahl-
systemen: Ergänzen Sie fehlende Zahlsymbole!

	1	2	3	4	5	10
11	11	22	33	44	55	110
12	12	24	40	52	104	120
13	13	30	43	100	113	130
14	14	32	50	104	122	140
15	15	34	53	112	131	150
20	20	40	100	120	140	200

	1	2	10
11	11	22	110
12	12	101	120
20	20	110	200

	1	2	3	10
11	11	22	33	110
13	13	32	111	130

	1	2	3	4	10
11	11	22	33	44	110
13	13	31	44	112	130
14	14	33	102	121	140

6/12

	1	2	3	10
11	11	22	33	110
12	12	30	102	120
13	13	32	111	130
20	20	100	120	200

	1	2	3	4	10
11	11	22	33	44	110
12	12	24	41	103	120
13	13	31	44	112	130
14	14	33	102	121	140
20	20	40	110	130	200

Z A H L S Y S T E M E U N D Z A H L S Y M B O L E

ZAHLSYSTEME I 1/1 - 1/11

ZAHLSYMBOL E I 2/1 - 2/12

ZAHLSYSTEME II 3/1 - 3/11

ZAHLSYMBOL E II 4/1 - 4/11

ZÄH LVORGANG 5/1 - 5/15

EINMAL EINS 6/1 - 6/12

OPERATIONEN		7/1 - 7/14
-------------	-------	------------

ÜBERSETZUNG 8/1 - 8/13

BRUCHZAHLEN 9/1 - 9/14

TEILBARKEIT 10/1 - 10/16

7/1

DREIERSYSTEM

$$+ 1 = 10$$

$$+ 1 = 100$$

$$+ 1 = 1000$$

FÜNFFERSYSTEM

$$+ 1 = 10$$

$$+ 1 = 100$$

$$+ 1 = 1000$$

ACHTERSYSTEM

$$+ 1 = 10$$

$$+ 1 = 100$$

$$+ 1 = 1000$$

ZWÖLFERSYSTEM

$$+ 1 = 10$$

$$+ 1 = 100$$

$$+ 1 = 1000$$

7/1

$$2 + 1 = 10$$

$$22 + 1 = 100$$

$$222 + 1 = 1000$$

$$4 + 1 = 10$$

$$44 + 1 = 100$$

$$444 + 1 = 1000$$

$$7 + 1 = 10$$

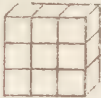
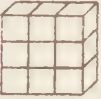
$$77 + 1 = 100$$

$$777 + 1 = 1000$$

$$E + 1 = 10$$

$$EE + 1 = 100$$

$$EEE + 1 = 1000$$

							
					2	2	2
					1	1	1
222 und 111 sollen addiert werden. Zeichnen und rechnen Sie in dem gegebenen Zahlssystem!							

7/2

							
				1	1	1	0

7/2

7/3

Die Differenz zwischen

[1110] _{zwei} und [0110] _{zwei}
ist ['] _{zwei} oder [] _{zehn}

[2110] _{drei} und [2210] _{drei}
ist [] _{drei} oder [] _{zehn}

[4321] _{fünf} und [4311] _{fünf}
ist [] _{fünf} oder [] _{zehn}

[7623] _{acht} und [7624] _{acht}
ist [] _{acht} oder [] _{zehn}

7/3

ist [1000] _{zwei} oder [8] _{zehn}
ist [100] _{drei} oder [9] _{zehn}
ist [10] _{fünf} oder [5] _{zehn}
ist [1] _{acht} oder [1] _{zehn}

Subtrahieren Sie 113 von 232 auf Basis vier!

7/4



2 3 2



- 1 1 3

7/4



1 1 3

7/5

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 5 \\ + 1 \quad 5 \quad 3 \\ \hline 5 \quad 2 \quad 2 \quad (6) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 5 \\ + 1 \quad 5 \quad 3 \\ \hline 5 \quad 0 \quad 0 \quad (8) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 5 \\ + 1 \quad 5 \quad 3 \\ \hline 4 \quad 7 \quad 8 \quad (10) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 5 \\ + 1 \quad 5 \quad 3 \\ \hline 4 \quad 7 \quad 8 \quad (12) \end{array}$$

Drei-zwei-fünf und eins-fünf-drei werden in vier Zahlssystemen addiert: Trotzdem ergeben sich schließlich nur drei verschiedene Zahl-symbole, da

7/5

....., da zwar Sechser- und Achter-, aber keine Zehner- und Zwölferübergänge erfolgen.

7/6

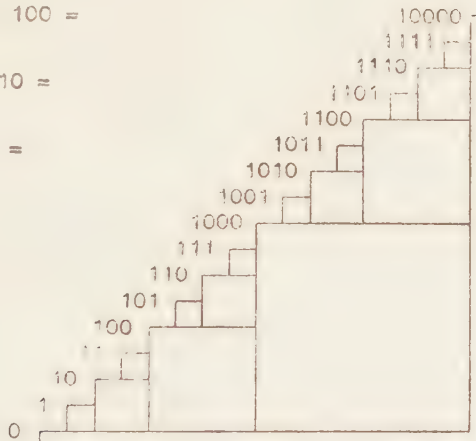
Rechnen Sie im Zweiersystem:

$$10000 - 1000 =$$

$$1000 - 100 =$$

$$100 - 10 =$$

$$10 - 1 =$$



$$10000 - 1000 = 1000$$

$$1000 - 100 = 100$$

$$100 - 10 = 10$$

$$10 - 1 = 1$$

7/6

7/7

Auf den angegebenen Basen soll schriftlich addiert und subtrahiert werden!

Basis sechs

$$\begin{array}{r} 2513 \\ + 2344 \\ \hline \end{array}$$

Basis zwölf

$$\begin{array}{r} 8Z45 \\ + 23E7 \\ \hline \end{array}$$

Basis sechs

$$\begin{array}{r} 5301 \\ - 2344 \\ \hline \end{array}$$

Basis zwölf

$$\begin{array}{r} E240 \\ - 23E7 \\ \hline \end{array}$$

7/7

$$\begin{array}{r} \hline 5301 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline E240 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 2513 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 8Z45 \\ \hline \end{array}$$

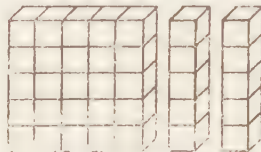
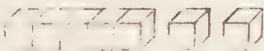
7/8

Im angegebenen Zahlssystem wird mit "10"
multipliziert. Das sich ergebende Zahl-
symbol endet mit einer Null: Ergänzen
Sie entsprechend folgende Darstellung!



$$12 \text{ (fünf)} \cdot 10 \text{ (fünf)} = 120 \text{ (fünf)}$$

7/8



7/9



$$2 \cdot 6 = 12 \text{ (zehn)}$$

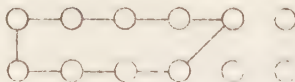


$$2 \cdot 6 = \text{ (neun)}$$



$$2 \cdot 6 = \text{ (acht)}$$

Ebenso wie auf der Basis zehn soll auf den Basen neun und acht multipliziert werden!



$$2 \cdot 6 = 13 \text{ (neun)}$$

7/9



$$2 \cdot 6 = 14 \text{ (acht)}$$

Rechnen Sie im Vierersystem:

$$10 : 2 =$$

$$21 : 3 =$$

$$12 : 3 =$$

$$22 : 11 =$$

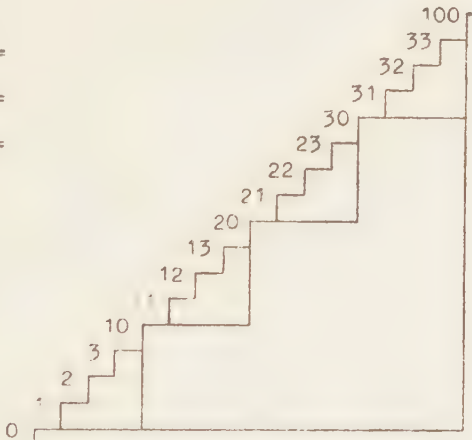
$$20 : 2 =$$

$$30 : 3 =$$

$$32 : 13 =$$

$$33 : 11 =$$

$$100 : 10 =$$



7/10

$$10 : 2 = 2$$

$$21 : 3 = 3$$

$$32 : 13 = 2$$

$$12 : 3 = 2$$

$$22 : 11 = 2$$

$$33 : 11 = 3$$

$$20 : 2 = 10$$

$$30 : 3 = 10$$

$$100 : 10 = 10$$

7/10

7/11

Der Quotient von

[33000] vier und [110] vier
ist [] vier oder [] zehn

[07700] acht und [110] acht
ist [] acht oder [] zehn

[00EE0] zwölf und [] zwölf
ist [] zwölf oder [] zehn

7/11

ist [300] vier oder [48] zehn

ist [070] acht oder [56] zehn

ist [00E] zwölf oder [11] zehn

7/12

g^2	g^1	g^0
3	2	0

g^2	g^1	g^0
3	2	4

g^6	g^5	g^4	g^3	g^2	g^1	g^0
	2	4	5	4		
		.	.	.	.	.

628 wird mit 534 multipliziert. Ergänzen Sie die Darstellung in dem gegebenen Zahlensystem!

7/12

	3	4	5	4	5	
			0	3	5	
			2	7	2	5
	3	7	0		8	5

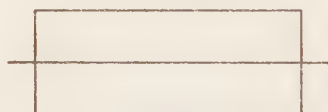
7/13



$$30 : 2 = 13_{(6)}$$



$$31 : 2 = 13_{()}$$

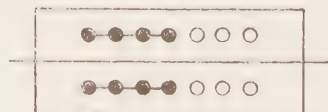


$$32 : 2 = 13_{()}$$

Drei verschiedene Zahlen werden durch zwei dividiert: Das Ergebnis ist jeweils "13", weil in verschiedenen Zahlssystemen gerechnet wird. Ergänzen Sie die Darstellungen!



$$31 : 2 = 13_{(5)}$$



$$32 : 2 = 13_{(4)}$$

7/13

$$1\ 3\ 4\ 6 : 3\ 5 = 2 \dots (\text{acht})$$

$$\begin{array}{r} 7\ 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3\ 5\ 2\ \dots \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7\ 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0\ 0\ 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 3\ 1\ 6 \\ \hline \end{array}$$

Auf der Basis acht soll dividiert, dann zur Probe multipliziert werden. Rechnen Sie durch ^{II}Übersetzung ins Zehnersystem!

$$1\ 1\ 3\ 1\ 6 : 3\ 5 = 2\ 4\ 6 (\text{acht})$$

$$\begin{array}{r} 7\ 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3\ 5\ 2\ 4\ 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 6\ 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7\ 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 5\ 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 6\ 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 5\ 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 5\ 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0\ 0\ 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 3\ 1\ 6 \\ \hline \end{array}$$

Z A H L S Y S T E M E U N D Z A H L S Y M B O L E

ZAHLSYSTEME I 1/1 - 1/11

ZAHLSYMBOL E I 2/1 - 2/12

ZAHLSYSTEME II 3/1 - 3/11

ZAHLSYMBOL E II 4/1 - 4/11

"ZÄH LVORGANG 5/1 - 5/15

EINMAL EINS 6/1 - 6/12

OPERATIONEN 7/1 - 7/14

"ÜBERSETZUNG 8/1 - 8/13

BRUCHZAHLEN 9/1 - 9/14

TEILBARKEIT 10/1 - 10/16

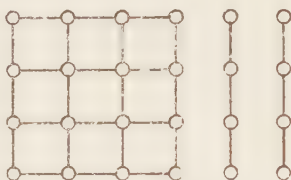
	8/1 1 1 1 (zwei)
	2 1 (drei)
	1 2 (fünf)
Wie viele Zahlen werden hier dargestellt?	

Es wird nur eine Zahl dargestellt, wenn auch in drei verschiedenen Zahlssystemen und durch drei verschiedene Zahlsymbole.

8/1

8/2

4^2	4^1	4^0
1	2	0



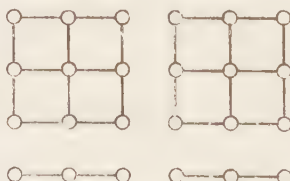
3^2	3^1	3^0



Mit den Zahlssystemen "ändern sich im allgemeinen auch die Zahlsymbole: Verwandeln Sie die Viererpotenzen in Dreierpotenzen!

8/2

3^2	3^1	3^0
2	2	0



8/3

Die gegebenen Zahlsymbole sollen in das Zahlensystem auf der Basis zehn übersetzt werden!

$$\begin{aligned} 132_{(6)} &= 1 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6^1 + 2 \cdot 6^0 = \\ &= 36 + 18 + 2 = 56_{(10)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 132_{(8)} &= 1 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = \\ &= = (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 132_{(10)} &= 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 = \\ &= = (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 132_{(12)} &= 1 \cdot 12^2 + 3 \cdot 12^1 + 2 \cdot 12^0 = \\ &= = (10) \end{aligned}$$

8/3

$$132_{(8)} = 64 + 24 + 2 = 90_{(10)}$$

$$132_{(10)} = 100 + 30 + 2 = 132_{(10)}$$

$$132_{(12)} = 144 + 36 + 2 = 182_{(10)}$$

$$4 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 1$$

$$4 \quad 0 \quad 1$$

$$1 \cdot 64 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \cdot 64 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

Je kleiner die Basis eines Zahlensystems, desto größer wird das Zahlsymbol einer Zahl: Schreiben Sie einhundert im Vierer- und Dreiersystem!

$$1 \cdot 64 + 2 \cdot 16 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1$$

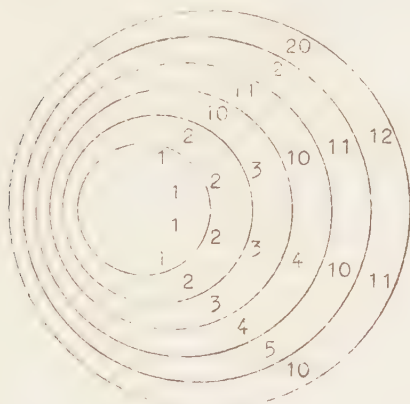
$$1 \quad 2 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \cdot 64 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

8/5

Verschiedene Zahlsymbole erfassen in verschiedenen Zahlssystemen die gleiche Zahl!



$$20() = 12() = 11() = 10()$$

8/5

$$20(3) = 12(4) = 11(5) = 10(6)$$

8/6

Übersetzen Sie das Zahlsymbol $110_{(3)}$ von dem einen Zahlssystem in die anderen, indem Sie jeweils bei 1 beginnend weiterzählen!

1 2 10 11 12 20 21 22 100 101 102 110
|-----|-----|-----|-----|

1 2 3 4 10 11
|-----|-----|-----|-----|

1 2 3 4 5 6
|-----|-----|-----|-----|

1 2 3 4 5 6
|-----|-----|-----|-----|

8/6

2 3 4 10 11 12 13 14 20 21 22
|-----|-----|-----|-----|

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
|-----|-----|-----|-----|

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
|-----|-----|-----|-----|

8/7

$$[144]_8 \Longrightarrow [\quad]_9$$

$$[144]_8 \Rightarrow [\quad]_{10} \Rightarrow [\quad]_9$$

$$[121]_{11} \Longrightarrow [\quad]_{12}$$

$$[121]_{11} \Rightarrow [\quad]_{10} \Rightarrow [\quad]_{12}$$

Versuchen Sie, die gegebenen Zahl-
symbole mit und ohne Zwischenschalt-
ung des Zehnersystems umzurechnen!

8/7

$$[144]_8 \Rightarrow [100]_{10} \Rightarrow [121]_9$$

$$[121]_{11} \Rightarrow [144]_{10} \Rightarrow [100]_{12}$$

Die Zahlsymbole eins - vier - vier sollen über Basis zehn in die angegebenen Zahlssysteme übersetzt werden!

$$144_{(5)} = (6) = (7)$$

$$144_{(6)} = (7) = (8)$$

$$144_{(7)} = (8) = (9)$$

$$144_{(8)} = (9) = (10)$$

$$144_{(9)} = (10) = (11)$$

$$144_{(10)} = (11) = (12)$$

$$144_{(1)} = 121_{(2)} = 100_{(3)}$$

8/9

BASIS ZWEI

BASIS VIER

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 \begin{array}{|c|} \hline 2 \cdot 2^4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 1 \cdot 2^2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 3 \cdot 2^0 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 \begin{array}{|c|} \hline 2 \cdot 4^2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 1 \cdot 4^1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 3 \cdot 4^0 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

BASIS DREI

BASIS NEUN

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 \begin{array}{|c|} \hline 7 \cdot 3^4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 4 \cdot 3^2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 6 \cdot 3^0 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Wie vier Potenz von zwei so ist
neun Potenz von drei. Verwenden
Sie diese Tatsachen zum Umrechnen!

BASIS DREI

BASIS NEUN

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 \begin{array}{|c|} \hline 7 \cdot 3^4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 4 \cdot 3^2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 6 \cdot 3^0 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & 4 & 6 \\ \hline \end{array} \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 \begin{array}{|c|} \hline 7 \cdot 9^2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 4 \cdot 9^1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 6 \cdot 9^0 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

8/9

8/10

$0_{(8)}$	=	$000_{(2)}$	$4_{(8)}$	=	$100_{(2)}$
$1_{(8)}$	=	$001_{(2)}$	$5_{(8)}$	=	$101_{(2)}$
$2_{(8)}$	=	$010_{(2)}$	$6_{(8)}$	=	$110_{(2)}$
$3_{(8)}$	=	$011_{(2)}$	$7_{(8)}$	=	$111_{(2)}$

Aus jeder Ziffer im Achtersystem ergeben sich drei Ziffern im Zweiersystem!

$$\boxed{6 \quad 5 \quad 3}_{(8)} = \boxed{1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1}_{(2)}$$

$$\boxed{4 \quad C \quad 1}_{(8)} = \boxed{\quad \quad \quad}_{(2)}$$

$$\boxed{2 \quad 7 \quad 0}_{(8)} = \boxed{\quad \quad \quad}_{(2)}$$

8/10

$$\boxed{4 \quad 0 \quad 1}_{(8)} = \boxed{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad C \quad C \quad 0 \quad 0 \quad 1}_{(2)}$$

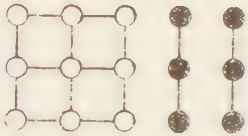
$$\boxed{2 \quad 7 \quad 0}_{(8)} = \boxed{0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_{(2)}$$

8/11

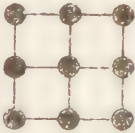
Beschreiben Sie das vorgeführte Verfahren.
von Basis zehn auf Basis drei umzurechnen!



$$17 : 3 = 5 \text{ R } 2 \quad (3^0)$$



$$5 : 3 = 1 \text{ R } 2 \quad (3^1)$$



$$1 : 3 = 0 \text{ R } 1 \quad (3^2)$$

$$[1 \ 7]_{\text{zehn}} = [1 \ 2 \ 2]_{\text{drei}}$$

8/11

Es wird wiederholt durch drei geteilt. Die
Reste ergeben Potenzen auf der Basis drei!

8/12

Übertragen Sie von Basis zehn auf Basis zwölf und überprüfen Sie das Ergebnis!

$[2398]_{10}$

$$2398 : 12 = 199 \text{ R } 2$$

$$199 : 12 = 16 \text{ R } 7$$

$$16 : 12 = 1 \text{ R } 4$$

$$1 : 12 = 0 \text{ R } 1$$

$[1672]_{12}$

$[\dots Z]_{12}$

$$2 \cdot 12^0 = 2$$

$$7 \cdot 12^1 = 84$$

$$1 \cdot 12^2 = 144$$

$$0 \cdot 12^3 = 0$$

$[2398]_{10}$

$$2398 : 12 = 199 \text{ R } 2$$

$$199 : 12 = 16 \text{ R } 7$$

$$16 : 12 = 1 \text{ R } 4$$

$$1 : 12 = 0 \text{ R } 1$$

$[1672]_{12}$

$[147Z]_{12}$

$$2 \cdot 12^0 = 2$$

$$7 \cdot 12^1 = 84$$

$$4 \cdot 12^2 = 576$$

$$1 \cdot 12^3 = 1728$$

8/12

8/13

Suchen Sie die 100. Stelle im 3-, 4-, 5-, 6-, 7-, 8-
system jeweils zweistellig ist:

Die gesuchte Zahl liegt zwischen

2 (2)	und	100 (3)
3 (3)	und	100 (4)
4 (4)	und	100 (5)
5 (5)	und	100 (6)
6 (6)	und	100 (7)
7 (7)	und	100 (8)

8/13

11 (3)	12 (4)	13 (5)
14 (6)	15 (7)	16 (8)

Z A H L S Y S T E M E U N D Z A H L S Y M B O L E

ZAHLSYSTEME I 1/1 - 1/11

ZAHLSYMBOL E I 2/1 - 2/12

ZAHLSYSTEME II 3/1 - 3/11

ZAHLSYMBOL E II 4/1 - 4/11

"ZÄHLVORGANG 5/1 - 5/15

EINMAL EINS 6/1 - 6/12

OPERATIONEN 7/1 - 7/14

"ÜBERSETZUNG 8/1 - 8/13

BRUCHZAHLEN 9/1 - 9/14

TEILBARKEIT 10/1 - 10/16

9/1

	$1/8$	$1/64$
8^0	8^{-1}	8^{-2}
1,0	0,125	0,015625

	$1/5$	$1/25$
5^0	5^{-1}	5^{-2}
1,0	0,2	0,04

3^0		

2^0		

Es seien die den gegebenen Potenzen
von acht und fünf entsprechenden Po-
tenzen von drei und zwei dargestellt.

9/1

	$1/3$	$1/9$
3^0	3^{-1}	3^{-2}
1,0	0,33...	0,11...

	$1/2$	$1/4$
2^0	2^{-1}	2^{-2}
1,0	0,5	0,25

9/2

$$9 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}$$

9 4 8 2 6

$$4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 + 0 \cdot 5^{-1} + 3 \cdot 5^{-2}$$

4 2 1 0 3

Bei "Systembrüchen" trennt das Komma die Koeffizienten der Potenzen mit negativem Exponenten von den

9/2

..... Koeffizienten der Potenzen mit nicht-negativem Exponenten.

9/3



Auf den angegebenen
Basen soll die dar-
gestellte Bruchzahl
als gemeiner Bruch
geschrieben werden.

BASIS ZWEI

$1/$

BASIS VIER

$1/$

BASIS SECHS

$1/$

BASIS ACHT

$1/$

BASIS ZEHN

$1/8$

BASIS ZWÖLF

$1/$

BASIS ZWEI

$1/1000$

BASIS VIER

$1/20$

BASIS SECHS

$1/12$

BASIS ACHT

$1/10$

BASIS ZEHN

$1/8$

BASIS ZWÖLF

$1/8$

9/3

Ein Bruch wird dadurch gekürzt, daß man Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl teilt.

9/4

$$\frac{2}{12} \text{ (zehn) } = \frac{1}{6} \text{ (zehn) }$$

$$\frac{2}{12} \text{ (acht) } = \text{ ——— (acht) }$$

$$\frac{2}{12} \text{ (sechs) } = \text{ ——— (sechs) }$$

$$\frac{2}{12} \text{ (vier) } = \text{ ——— (vier) }$$

$$\frac{2}{12} \text{ (acht) } = \frac{1}{6} \text{ (acht) }$$

$$\frac{2}{12} \text{ (sechs) } = \frac{1}{4} \text{ (sechs) }$$

$$\frac{2}{12} \text{ (vier) } = \frac{1}{3} \text{ (vier) }$$

9/4

9/5

Der gemeine Bruch $1/2$ wird in System-
"brüche verschiedener Basen umgerechnet.
Teilen Sie den Zähler durch den Nenner!

Basis	3	$1/2 = 1 : 2 = 0,$
Basis	4	$1/2 = 1 : 2 = 0,2$
Basis	5	$1/2 = 1 : 2 = 0,$
Basis	6	$1/2 = 1 : 2 = 0,3$
Basis	7	$1/2 = 1 : 2 = 0,$
Basis	8	$1/2 = 1 : 2 = 0,4$
Basis	9	$1/2 = 1 : 2 = 0,$
Basis	10	$1/2 = 1 : 2 = 0,5$
Basis	11	$1/2 = 1 : 2 = 0,$
Basis	12	$1/2 = 1 : 2 = 0,6$

9/5

Basis	3	$1/2 = 1 : 2 = 0,111...$
Basis	5	$1/2 = 1 : 2 = 0,222...$
Basis	7	$1/2 = 1 : 2 = 0,333...$
Basis	9	$1/2 = 1 : 2 = 0,444...$
Basis	11	$1/2 = 1 : 2 = 0,555...$

9/6

Für welche Basen gilt folgender Satz: Ein Systembruch wird mit 10 (eins-null) multipliziert (dividiert), indem man das Komma um eine Stelle nach rechts (links) rückt?

$$1, 11 \cdot 10 = 11, 1$$

$$(10^0 + 10^{-1} + 10^{-2}) \cdot 10^1 = 10^1 + 10^0 + 10^{-1}$$

$$11, 1 : 10 = 1, 11$$

$$(10^1 + 10^0 + 10^{-1}) : 10^1 = 10^0 + 10^{-1} + 10^{-2}$$

Satz und Beispiele gelten für alle Basen.

9/6

9/7

BASIS DREI



$1/3$

BASIS VIER



$1/4$

BASIS FÜNF



$1/5$

Zähler und Nenner sind einstellig:
Zeichnen Sie die angegebenen Bruch-
zahlen auf den Basen vier und fünf!

9/7



$1/4$



$1/5$



$1/6$

9/8

$$2/3_{(4)} \quad 2/3_{(8)}$$

$$20/3_{(4)} \quad 20/3_{(8)}$$

$$2/30_{(4)} \quad 2/30_{(8)}$$

$$20/30_{(4)} \quad 20/30_{(8)}$$

Zwischen die angegebenen Zahlen sind
die Zeichen für "kleiner als", "grö-
ßer als" und "ist gleich" zu setzen!

9/8

$$2/3_{(4)} = 2/3_{(8)}$$

$$20/3_{(4)} < 20/3_{(8)}$$

$$2/30_{(4)} > 2/30_{(8)}$$

$$20/30_{(4)} = 20/30_{(8)}$$

3 : 5 = 0, 4 6 3 1 4 5 3 1 (acht)

3 0
4 0
2 0
1 0
3 0
4 0
2 0
1 0
.
.
.
.
.

Drei wird durch fünf auf der Basis acht dividiert:
Das Ergebnis heißt ein nicht abbrechender, reinpe-
riodischer Systembruch mit vierstelliger Periode,
da die Division nicht endet,

....., sondern vier bestimm-
te Ziffern nach dem Komma regelmäßig wiederkehren.

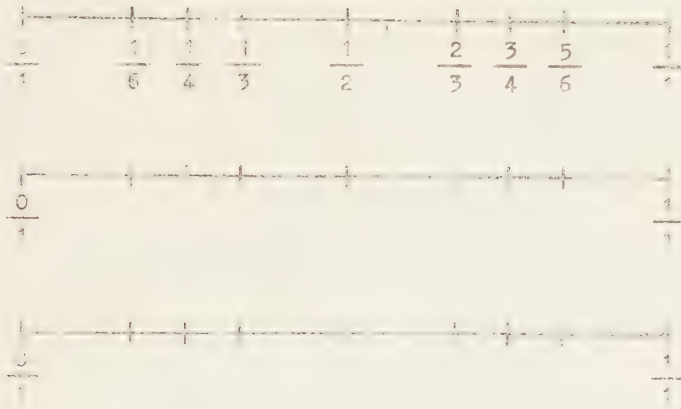
JUNERSYSTEM	ZEHNERSYSTEM
$\frac{4}{4} = 1 : 4 = 1,00$	$\frac{4}{4} = 4 : 4 = 1,00$
$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75$	$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75$
$\frac{2}{4} = 2 : 4 = 0,50$	$\frac{2}{4} = 2 : 4 = 0,50$
$\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0,25$	$\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0,25$
Dieselben gemeinen Brüche können abbrechende oder nicht abbrechende Systembrüche ergeben.	

9/10

$\frac{2}{4} = 2 : 4 = 0,50$	$\frac{2}{4} = 2 : 4 = 0,50$
$\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0,25$	$\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0,25$

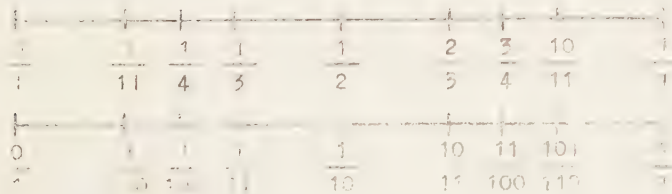
9/10

9/11



Dieselben Bruchzahlen zwischen null
und eins sollen auf den Basen zehn,
fünf und zwei dargestellt werden.

9/11



9/12



$$1/4 + 1/6 = 3/12 + 2/12 = 5/12 \text{ (zwölf)}$$

$$1/4 - 1/6 = \quad = \quad \text{ (zwölf)}$$

$$1/4 + 1/10 = \quad = \quad \text{ (sechs)}$$

$$1/4 - 1/10 = \quad = \quad \text{ (sechs)}$$

Gemeine Brüche lassen sich addieren bzw.
subtrahieren, wenn sie gleichnamig sind.

9/12

$$1/4 + 1/6 = 3/12 + 2/12 = 5/12 \text{ (zwölf)}$$

$$1/4 - 1/6 = 3/12 - 2/12 = 1/12 \text{ (zwölf)}$$

$$1/4 + 1/10 = 3/20 + 2/20 = 5/20 \text{ (sechs)}$$

$$1/4 - 1/10 = 3/20 - 2/20 = 1/20 \text{ (sechs)}$$

9/13

5 5 5 (neun)

$$5 \cdot 9 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 1/9$$

$$1 \cdot 27 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 13 + 2 \cdot 1/9$$

1 2 3 2 1 (drei)

3 3 3 acht

$$3 \cdot 8 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1/8$$

(zwei)

Systembrüche sind leicht zu "übersetzen, wenn
in zwei Systemen gleiche Potenzen auftreten.

9/13

3 3 3 (acht)

$$3 \cdot 8 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1/8$$

$$1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/8$$

1 1 0 1 1 , 0 1 1 (zwei)

9/14

$0,11.. (9)$	$\begin{array}{r} 8 \cdot 0,11.. = 1,11.. \\ 1 \cdot 0,11.. = 0,11.. \\ \hline 8 \cdot 0,11.. = 1,00.. \end{array}$	$0,11.. (9) = 1/8$
$0,11.. (6)$	$\begin{array}{r} 10 \cdot 0,11.. = 1,11.. \\ 1 \cdot 0,11.. = 0,11.. \\ \hline 5 \cdot 0,11.. = 1,00.. \end{array}$	$0,11.. (6) = 1/5$
$0,11.. (3)$	$\begin{array}{r} 3 \cdot 0,11.. = 1,11.. \\ 1 \cdot 0,11.. = 0,11.. \\ \hline 2 \cdot 0,11.. = 1,00.. \end{array}$	$0,11.. (3) = 1/2$
Auf jeder Basis lassen sich periodische Systembrüche in gemeine Brüche umformen.		

9/14

$0,11.. (6)$	$\begin{array}{r} 10 \cdot 0,11.. = 1,11.. \\ 1 \cdot 0,11.. = 0,11.. \\ \hline 5 \cdot 0,11.. = 1,00.. \end{array}$	$0,11.. (6) = 1/5$
$0,11.. (3)$	$\begin{array}{r} 3 \cdot 0,11.. = 1,11.. \\ 1 \cdot 0,11.. = 0,11.. \\ \hline 2 \cdot 0,11.. = 1,00.. \end{array}$	$0,11.. (3) = 1/2$

Z A H L S Y S T E M E U N D Z A H L S Y M B O L E

ZAHLSYSTEME I 1/1 - 1/11

ZAHLSYMBOL E I 2/1 - 2/12

ZAHLSYSTEME II 3/1 - 3/11

ZAHLSYMBOL E II 4/1 - 4/11

"ZÄHLVORGANG 5/1 - 5/15

EINMAL EINS 6/1 - 6/12

OPERATIONEN 7/1 - 7/14

"ÜBERSETZUNG 8/1 - 8/13

BRUCHZAHLEN 9/1 - 9/14

TEILBARKEIT 10/1 - 10/16

10/1

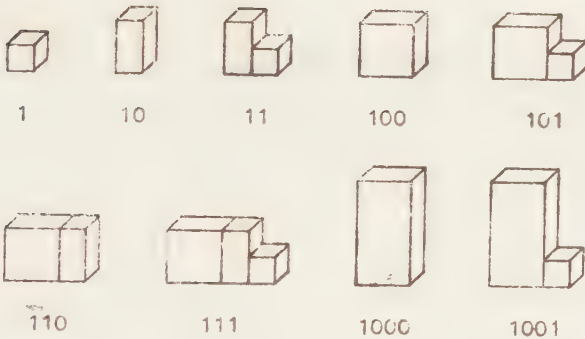
1	1	1	1
10	2	2	2
11	10	3	3
100	11	4	4
101	12	10	5
110	20	11	6
111	21	12	7
1000	22	13	8
1001	100	14	9
	101		
1011	102	21	11
		22	12
1101	111	23	13
	112	24	14
1111			15
	121	31	16
10001	122	32	17
		33	18
10011	201	34	19
	202		

Im Zahlssystem auf der Basis zwei (drei, fünf, zehn) ist eine Zahl durch 10_2 (10_3 , 10_5 , 10_Z) teilbar, wenn die letzte Ziffer eine Null ist. Schreiben Sie die entsprechenden Zahlsymbole!

1010		20	10
1100	110		
1110			
10000	120	30	
10010	200		
10100		40	20

10/1

10/2



Eine Zahl ist durch $10_{(\text{zwei})}$ teilbar, wenn die letzte ihres auf Basis zwei eine ist. Denn alle des Zweier-systems außer 2^0 sind durch $10_{(\text{zwei})}$ teilbar.

10/2

Eine Zahl ist durch $10_{(\text{zwei})}$ teilbar, wenn die letzte Ziffer ihres Zahlensymbols auf Basis zwei eine Null ist. Denn alle Potenzen des Zweier-systems außer 2^0 sind durch $10_{(\text{zwei})}$ teilbar.

10/3

Da 6^1 , 6^2 , 6^3 ... durch zwei und drei teilbar sind, ist eine Zahl durch 2 bzw. 3 teilbar, wenn ihre Ziffer auf Basis sechs eine durch teilbare Zahl darstellt.

Da 12^1 , 12^2 , 12^3 ... durch drei und vier teilbar sind, ist eine Zahl durch 3 bzw. 4 teilbar, wenn ihre Ziffer auf Basis zwölf eine durch teilbare Zahl darstellt.

..., wenn ihre letzte Ziffer auf Basis sechs eine durch 2 bzw. 3 teilbare Zahl darstellt.

..., wenn ihre letzte Ziffer auf Basis zwölf eine durch 3 bzw. 4 teilbare Zahl darstellt.

10/3

10/4

Eine Zahl ist durch 100 teilbar, wenn die zwei Endziffern ihres Zahlsymbols 0 sind.

Eine Zahl ist durch 1000 teilbar, wenn die drei Endziffern ihres Zahlsymbols 0 sind.

Für welches Zahlssystem gelten diese Sätze?

10/4

Diese Sätze gelten für alle Zahlssysteme!

10/5

1	2	3	4	5	10	11	12	13	14
2	4	10	12	14	20	22	24	30	32
3	10	13	20	23	30	33	40	43	50
4	12	20	24	32	40	44	52	100	104
5	14	23	32	41	50	55	104	113	122
10	20	30	40	50	100	110	120	130	140

Im Zahlssystem auf der Basis
sind alle Zahlen durch teil-
bar, deren Zahlensymbol als letzte Zif-
fer eine oder eine hat.

10/5

Im Zahlssystem auf der Basis
sind alle Zahlen durch teil-
bar, deren Zahlensymbol als letzte Zif-
fer eine oder eine hat.

10/6

2 10 12 20 22 30 32 ..

3 10 13 20 23 30 33 40 43 ..

4 10 50 54 ..

5 10 60 65 ..

6 10 70 76 ..

Im Zahlssystem auf der Basis 4 (6, 8, 10, 12) sind alle Zahlen durch 2 (3, 4, 5, 6) teilbar, deren letzte Ziffer 2 (3, 4, 5, 6) oder 0 ist. Schreiben Sie die entsprechenden Zahlensymbole!

10/6

4 10 14 20 24 30 34 40 44 50 54 ..

5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 ..

6 10 16 20 26 30 36 40 46 50 56 60 66 70 76 ..

10/7

$$[5 \cdot 10^4] + [1 \cdot 10^3] + [4 \cdot 10^2] + [7 \cdot 10^1] + [2 \cdot 10^0]$$

$$5 \quad 1 \quad 4 \quad 7 \quad 2$$

10^2 , 10^3 , 10^4 etc. sind durch **vier** teilbar.

Also ist eine Zahl durch **vier** teilbar, wenn auch die **zwei** letzten Ziffern ihres Zahlsymbols auf Basis zehn eine durch **vier** teilbare Zahl darstellen.

10^3 , 10^4 , 10^5 etc. sind durch **acht** teilbar.

Also ist eine Zahl durch teilbar, wenn auch die letzten Ziffern ihres Zahlsymbols auf Basis zehn eine durch teilbare Zahl darstellen.

10/7

10^3 , 10^4 , 10^5 etc. sind durch **acht** teilbar.

Also ist eine Zahl durch **acht** teilbar, wenn auch die **drei** letzten Ziffern ihres Zahlsymbols auf Basis zehn eine durch **acht** teilbare Zahl darstellen.

10/8

Die Potenzen der Basis sechs mit den Exponenten zwei, drei, vier etc. sind durch vier teilbar. Streichen Sie alle Zahlsymbole, die keine durch vier teilbare Zahl darstellen!

53214(sechs) 24520(sechs) 41532(sechs)

Die Potenzen der Basis zwölf mit den Exponenten zwei, drei, vier etc. sind durch neun teilbar. Streichen Sie alle Zahlsymbole, die keine durch neun teilbare Zahl darstellen!

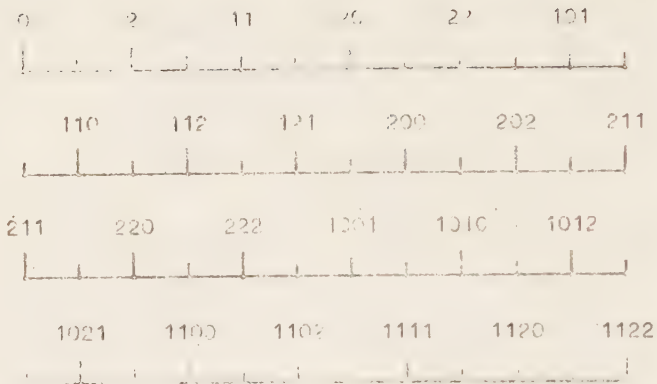
9E230(zwölf) 29723(zwölf) 871EZ(zwölf)

10/8

53244(sechs) 24520(sechs) 41532(sechs)

9E230(zwölf) 29723(zwölf) 874EZ(zwölf)

10/9



Im system ist eine Zahl durch zwei teilbar, wenn die Quersumme des Zahlsymbols durch teilbar ist.

10/9

Im Dreiersystem ist eine Zahl durch zwei teilbar, wenn die Quersumme des Zahlsymbols durch zwei teilbar ist.

Basis zehn ist eine Zahl durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist, z.B:

$$5\ 8\ 3\ 2 \text{ (zehn)} =$$

$$5 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 1 \text{ (zehn)} =$$

$$(5 \cdot 999 + 5) + (8 \cdot 99 + 8) + (3 \cdot 9 + 3) + (2 \cdot 0 + 2)$$

└──────────┴──────────┴──────────┴──────────┘

Quersumme!

Auf Basis fünf ist eine Zahl durch 4 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 4 teilbar ist, z.B:

$$2\ 1\ 2\ 3 \text{ (fünf)} =$$

$$2 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 \text{ (fünf)}$$

$$(2 \cdot 444 +) + (1 \cdot 44 +) + (2 \cdot 4 +) + (3 \cdot 0 +)$$

└──────────┴──────────┴──────────┴──────────┘

Quersumme!

$$2\ 1\ 2\ 3 \text{ (fünf)} =$$

$$2 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 \text{ (fünf)}$$

$$(2 \cdot 444 + 2) + (1 \cdot 44 + 1) + (2 \cdot 4 + 2) + (3 \cdot 0 + 3)$$

└──────────┴──────────┴──────────┴──────────┘

Quersumme!

10/11

Für das Zahlssystem auf Basis gilt:
Eine Zahl ist durch teilbar, wenn
ihre Quersumme durch teilbar ist.

Für das Zahlssystem auf Basis gilt:
Eine Zahl ist durch teilbar, wenn
ihre Quersumme durch teilbar ist.

Für das Zahlssystem auf Basis gilt:
Eine Zahl ist durch teilbar, wenn
ihre Quersumme durch teilbar ist.

.....

.....

.....

10/11

10/12

Einer der folgenden Sätze ist falsch!

(a) Eine Zahl ist durch zwei teilbar,
wenn die Quersumme des Zahlsymbols auf
Basis sieben durch sechs teilbar ist.

(b) Eine Zahl ist durch drei teilbar,
wenn die Quersumme des Zahlsymbols auf
Basis sieben durch sechs teilbar ist.

(c) Eine Zahl ist durch vier teilbar,
wenn die Quersumme des Zahlsymbols auf
Basis sieben durch sechs teilbar ist.

10/12

(c) Eine Zahl ist durch vier teilbar,
wenn die Quersumme des Zahlsymbols auf
Basis sieben durch sechs teilbar ist.

10/13

Basis 4	Basis 6	Basis 8	Basis Z
---------	---------	---------	---------

3	5	7	9
12	14	16	18
21	23	25	27
30	32	34	36
3	4	4	4
10	5	5	5
11	5	6	6
12	10	7	7
12	11	7	8
13	12	10	9
201	131	115	99
210	140	124	108

"
Ergänzen Sie die gegebenen Zahlenfolgen!

10/13

33	41	43	45
102	50	52	54
111	55	61	63
120	104	70	72
123	113	77	81
132	122	106	90

10/14

Wie lautet die Quersummenregel für eine
Teilbarkeit durch elf im Zwölfersystem?

11	(10)	=	E	(12)	
22	(10)	=	1Z	(12)	
33	(10)	=	29	(12)	
44	(10)	=	38	(12)	
55	(10)	=	47	(12)	
66	(10)	=	56	(12)	
77	(10)	=	65	(12)	
88	(10)	=	74	(12)	
99	(10)	=	83	(12)	
110	(10)	=	92	(12)	
121	(10)	=	Z1	(12)	
132	(10)	=	EC	(12)	
143	(10)	=	EE	(12)	!!
154	(10)	=	10Z	(12)	

10/14

Eine Zahl ist durch elf teilbar, wenn
ihre Quersumme durch elf teilbar ist.

10/15

Eine Zahl ist durch neun teilbar,
wenn die Quersumme ihrer Ziffern auf
Basis zehn durch neun teilbar ist.

Eine Zahl ist durch neun teilbar,
wenn die Quersumme ihrer Ziffern auf
Basis zehn durch drei teilbar ist.

Eine Zahl ist durch drei teilbar,
wenn die Quersumme ihrer Ziffern auf
Basis zehn durch neun teilbar ist.

Eine Zahl ist durch drei teilbar,
wenn die Quersumme ihrer Ziffern auf
Basis zehn durch drei teilbar ist.

Einer der ["]Sätze ist nicht richtig!

10/15

Eine Zahl ist durch neun teilbar,
wenn die Quersumme ihrer Ziffern auf
Basis zehn durch drei teilbar ist.

10/16

Eine Zahl ist durch 2 (3, 4, 5) teilbar,
wenn die Quersumme ihrer Ziffern auf der
Basis 7 durch 2 (3, 4, 5) teilbar ist.

Eine Zahl ist durch 2 (3, 4, 5) teilbar,
wenn die Quersumme ihrer Ziffern auf der
Basis 9 durch 2 (3, 4, 5) teilbar ist.

Eine Zahl ist durch 2 (3, 4, 5) teilbar,
wenn die Quersumme ihrer Ziffern auf der
Basis E durch 2 (3, 4, 5) teilbar ist.

Streichen Sie die unzutreffenden Zahlen!

..... durch 2 (3, 4, 5)
..... durch 2 (3, 4, 5)

..... durch 2 (3, 4, 5)
..... durch 2 (3, 4, 5)

10/16

LITERATURVERZEICHNIS

(1) ZAHLSYSTEME UND ZAHLSYMBOL - MATHEMATISCHE DARSTELLUNGEN

ADLER, I.

Die Neue Mathematik.

Freiburg 1966

ALLENDORFER, C. B. u. OAKLEY, C. O.

Principles of Mathematics.

New York 1969

BARKER, C. M. u. CURRAN, H. u. METCALF, M.

Grundschule und moderne Mathematik.

Weinheim 1969

BARTEL, H.

Das Zehnersystem vom nicht dekadischen Standpunkt aus.

In: Der Mathematikunterricht (1968/2)

BEHNKE, H. (Hsg.)

Das Fischer-Lexikon Mathematik 1.

Frankfurt/M. 1964

BEHNKE, H. u. REMMERT, R.

Vorlesungen über allgemeine Zahlentheorie. Band XVIII.

Münster/Westf. 1956

BELL, S. E.

Das Zweiersystem und andere Zahlssysteme.

Stuttgart 1971

BUTH, M.

Zahlen in Stellenwertsystemen.

Düsseldorf 1973

DIENES, Z. P.

Aufbau der Mathematik.

Freiburg 1965

DIENES, Z. P.

Multibase Arithmetic.

In: Grade Teacher (1962/4)

- FLETCHER, T. J.
Exemplarische Übungen zur modernen Mathematik.
Freiburg 1971
- GINTHER, J. L.
Applications of Base-Three Numeration.
In: The Mathematics Teacher (1967/12)
- GLÖCKL, J.
Die Kontingenz der Ziffer.
Frankfurt/M. 1972
- GÜRKE, L.
Mengen, Relationen, Funktionen.
Frankfurt/M. 1974
- GORENFLO, H.
Besondere Stellenwertsysteme.
In: Praxis der Mathematik (1973/2)
- GORENFLO, H.
Die Ziffer "Meins".
In: Bild der Wissenschaft (1973/1)
- HAACK, O.
Einführung in die Digitaltechnik.
Stuttgart 1972
- HAEBERLEIN, F.
Eine Minimaleigenschaft des Dreiersystems.
In: Praxis der Mathematik (1972/4)
- HARDY, G. H. u. WRIGHT, E. M.
Einführung in die Zahlentheorie.
München 1958
- HASSE, H.
Vorlesungen über Zahlentheorie.
Berlin 1950
- HERING, H.
Nochmals: Minimaleigenschaften des Dreiersystems.
In: Praxis der Mathematik (1972/11)
- HERING, H.
Optimierung von Darstellungen natürlicher Zahlen in
Stellenwertsystemen als Extremwertaufgabe.
In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Un-
terricht (1972/6)

- JARENTE, F.
Zahlen. Mengen, Zahlbegriff, Zahlssysteme.
Freiburg 1973
- JOHNSON, D. A. u. GLENN, W. H.
Understanding Numeration Systems.
Manchester 1960
- KUIPERS, L. u. TIMMAN, R. (Hsg.)
Handbuch der Mathematik.
Berlin 1968
- LANDAU, E.
Grundlagen der Analysis.
New York 1965
- LENZ, H.
Grundlagen der Elementarmathematik.
Berlin 1967
- LEPPIG, M.
Lehrbuch der Computermathematik. Sekundarstufe I.
Dargestellt an einem Computer-Übungsmodell.
Hannover 1971
- LUBESEDER, U.
Mengen, Formen, Relationen.
Hannover 1970
- MEHL, W. G.
Grids, Integers, and Number Bases.
In: The Mathematics Teacher (1967/12)
- MESCHKOWSKI, H.
Einführung in die moderne Mathematik.
Mannheim 1971
- MESSERLE, G.
Die Darstellung und Schreibweise natürlicher Zahlen
in verschiedenen Stellenwertsystemen.
In: Beiträge zum Mathematik-Unterricht in den Klassen
1 - 6 (1972)
- MONSOUR, N.
Largest Number That Can Be Written in Any Base.
In: The Arithmetic Teacher (1967/3)
- NEISS, F.
Einführung in die Zahlentheorie.
Leipzig 1952

- BECHER, K. E.
Einführung in das binäre Zahlensystem.
Braunschweig 1964
- BERGMANN, H.
Allgemeine Stellenwertsysteme.
Wolfenbüttel 1970
- BORCHERS, H. u. OPITZ, R.
Test zu Lambacher-Schweizer, Rechnen und Raumlehre I:
Stellenwertsysteme.
Stuttgart 1973
- CLARKE, J.
Understanding Number Base. A first book of notation.
London 1969
- CLARKE, J.
Place Value. A second book of notation.
London 1969
- MARKS, R. W.
Computerrechnen - Schritt für Schritt.
Ein programmiertes Taschenbuch über die Rechensysteme
der Datenverarbeitung.
München 1970
- MICHAEL, M. L. u. LEVINSKY, S.
Number Bases and Binary Arithmetic.
London 1963
- MOOS, L.
Zahlensysteme.
Berlin 1970
- SCHNEIDER, W.
Rechnen leichter gelernt: Die Zahl.
München 1969
- STILL, P.
Place Value.
London 1968
- TELEFUNKEN AG (Hsg.)
Grundlagen der Datenverarbeitung I. Dualarithmetik.
Berlin 1966
- ZIELINSKI, J. u. SCHÖLER, W. (Hsg.)
Unterrichtsprogramm Rechnen. Förderkurs Band I.
Köln-Braunsfeld 1968

(8) SYSTEME DER ABZÄHLE - HISTORISCHE DARSTELLUNGEN

ADLER, I. L. ADLER, R.
Numbers old and new.
London 1961

BECKER, C.
Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung.
Freiburg 1954

BIDWELL, J. K.
Mayan Arithmetic.
In: The Mathematics Teacher (1967/11)

BOYER, L. E.
An Introduction to Mathematics. A Historical Development.
New York 1955

CAJORI, F.
A History of Mathematical Notations.
London 1928

CHACE, A. B.
The Rhind Mathematical Papyrus.
Chicago 1927

CHITA, P. O. SIMON, A. A.
History of Hindu mathematics. A source book.
Part I: Numeral notation and arithmetic.
Lahore 1935

EVES, H. u. NEWSOM, C. V.
An Introduction to the Foundations and Fundamental
Concepts of Mathematics.
New York 1965

FETTWEIS, E.
Stellenwertsystem der alten Kulturvölker.
In: Welt der Schule (1953/12)

FRIEDLEIN, G.
Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen
und Römer und des christlichen Abendlandes.
Wiesbaden 1968

GARDTHAUSEN, V.
Die römischen Zahlzeichen.
In: Germanisch-romanische Monatsschrift (1909/1)

- HILL, G. F.
The Development of Arabic Numerals in Europe.
Oxford 1915
- HUMBOLDT, A. v.
Über die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von
Zahlzeichen und Über den Ursprung des Stellenwerts der
indischen Ziffern.
In: Crelles Journal (1829/4)
- LATTIN, H. P.
The origins of our present system of notation according
to the theories of Nicolas Bubnow.
In: Isis (1933)
- LÜFFLER, E.
Ziffern und Ziffernsysteme der Kulturvölker in alter
und neuer Zeit. 2 Bände.
Leipzig 1928
- MARKS, R. W.
The Growth of Mathematics from Counting to Calculus.
New York 1964
- MENNINGER, K.
Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl.
Göttingen 1958
- MICHEL, W.
Die Entstehung der Zahlen.
Bern 1941
- MORLEY, L. G.
An Introduction to the Study of the Maya Hieroglyphs.
Washington 1915
- NEUGEBAUER, O.
The Exact Sciences in Antiquity.
Providence 1957
- NEUGEBAUER, O.
Vorgriechische Mathematik.
Berlin 1934
- NORDENSKIÖLD, E.
The Secret of the Peruvian Quipus.
In: Comparative ethnographical Studies (1925/6)
- SARTON, G.
Minoan Mathematics.
In: Isis (1936)

-
The Concept of Number. A Chapter in the History of Mathematics, with Applications of Interest to Teachers.
Mannheim 1958
- SMELTZER, D.
Man and Number.
London 1958
- SMITH, D. E.
History of Mathematics.
New York 1958
- SMITH, D. E.
Number Stories of Long Ago.
Washington 1951
- SMITH, D. E.
The Roman Numerals.
In: Scientia (1926)
- SMITH, D. E. u. GINSBURG, J.
Numbers and Numerals.
Washington 1937
- SMITH, D. E. u. KARPINSKI, L. G.
The Hindu-Arabic Numerals.
London 1911
- SMITH, D. E. u. MIKAMI, Y.
History of Japanese Mathematics.
Chicago 1914
- THOMPSON, J. E.
Maya Arithmetic.
Washington 1942
- TODD, M. N.
The Greek Numeral Systems.
In: Journal of Hellenic Studies (1913)
- TODD, M. N.
The alphabetic Numeral System in Attica.
In: Annual of British School of Athens (1950)
- VAN DER WAERDEN, G. L.
Erwachende Wissenschaft. "gyptische, babylonische und griechische Mathematik.
Basel 1966

VOGEL, K.

Adam Riese, der deutsche Rechenmeister.
München 1959

WERTHEIMER, M.

Über das Denken der Naturvölker: Zahlen und Zahlgebilde.
In: Zeitschrift für Psychologie (1912)

WILLERS, F. A.

Zahlzeichen und Rechnen im Wandel der Zeit.
Berlin 1950

(4) ZAHLSYSTEME UND ZAHLSYMBOLS - DIDAKTISCHE DARSTELLUNGEN

ARENDT, J. u. USBECK, F. W.

Mathematik im 1. Schuljahr. Ein didaktisch-methodisches
Handbuch.
Düsseldorf 1970

ASSOCIATION OF TEACHERS OF MATHEMATICS

Notes on Mathematics in Primary Schools.
Cambridge 1969

BAUR, M.

Zahlensysteme im elementaren Mathematikunterricht.
In: Welt der Schule (1969)

BLÖCHLIGER, R.

Revolution im Rechenbuch.
Rheinbek 1970

COLLIER, C. C. u. LERCH, H. H.

Teaching mathematics in the modern elementary school.
London 1969

DENNEBERG, D.

Elementare Behandlung der Ziffernsysteme und der Rest-
klassenringe in der Schule.
In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unter-
richt (1973)

DIENES, Z. P.

Die Arithmetik der natürlichen Zahlen. Handreichung für
den Gebrauch der Mehrsystem-Blöcke für Arithmetik.
Freiburg 1967

- DIENES, Z. P.
Moderne Mathematik in der Grundschule.
Freiburg 1968
- DIENES, Z. P. u. GOLDING, E. W.
Menge, Zahl, Potenz. Mathematik-Unterricht II.
Freiburg 1966
- DIENES, Z. P. u. GOLDING, E. W.
Methodik der modernen Mathematik. Grundlagen für Lernen
in Zyklen.
Freiburg 1970
- FUCHS, W. R.
Eltern entdecken die neue Mathematik. Mengen und Zahlen.
München 1970
- GRIESEL, H.
Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten. Band I.
Mengen, Zahlen, Relationen, Topologie.
Hannover 1971
- GRIESEL, H.
Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten. Band II.
Größen, Bruchzahlen, Sachrechnen.
Hannover 1973
- GOUTARD, M.
Mathematik und Kinder. Eine Überprüfung unserer Einstellung
zum Mathematikunterricht.
Neubiberg 1967
- KENNEDY, L. M.
Models for Mathematics in the Elementary School.
Belmont 1967
- KUNTZE, K.
Aufbau der Mathematik 1.
München 1971
- KUNTZE, K.
Bausteine der Mathematik 2/3.
München 1971/1972
- MAIER, H.
Didaktik der Mathematik 1 - 9. Sachlogische Analyse der
Lehr- und Lernziele für die ersten neun Schülerjahrgänge.
Donauwörth 1970
- MEISCHKOWSKI, H. (Hsg.)
Mathematik-Ouden für Lehrer. Stoff, Didaktik.
Mannheim 1969

- MESSERLE, G.
Die Darstellung und Schreibweise natürlicher Zahlen
in verschiedenen Stellenwertsystemen.
In: Beiträge zum Mathematik-Unterricht in den Klassen 1 - 6 (1972)
- NEUNZIG, W. u. SORGER, P.
Wir lernen Mathematik, Lehreranleitung I, II, III, IV.
Freiburg 1968/68/69/70
- PADBERG, F.
Zur Behandlung von Stellenwertsystemen im Unterricht.
In: Archimedes (1972)
- PICARD, N. u. BIEMEL, R.
Entdeckung der Zahl. Zahlssysteme I/II. Lehrerhefte.
Stuttgart 1967/69
- RAHN, G.
Grundschulmathematik.
Hannover 1969
- RAPPAPORT, D.
Understanding and teaching elementary school mathematics.
New York 1966
- RÖHRL, E.
Mathematik - kommt es zur großen Reform?
In: Die Schulwarte (1968/7)
- SAWYER, W. W.
Vision in elementary mathematics.
Harmondsworth 1964
- SCHOOLS COUNCIL
Mathematics in primary schools.
London 1969
- SCHWARTZE, H.
Grundriß des mathematischen Unterrichts.
Bochum 1967
- WARD, M. u. HARDGROVE, C. E.
Modern Elementary Mathematics.
Reading 1964
- WOLFF, G. (Hsg.)
Handbuch der Schulmathematik. Arithmetik, Zahlenlehre.
Hannover 1966

(5) LEHRPLÄNE UND LEHRMATERIALIEN - CURRICULARE DARSTELLUNGEN

- ABELE, A.
Überlegungen und Materialien zu einem neuen Lehrplan für
den Mathematikunterricht in der Grundschule.
In: Die Schulfache (1970/9,10)
- ANDELFINGER, B. u. NESTLE, F.
Wege zu einer neuen Schulmathematik.
Freiburg 1967
- BAUERSFELD, H.
Mathematik in der Grundschule?
In: Die Deutsche Schule (1969/9)
- BIGALKE, H. G.
Modernisierung des Mathematikunterrichts.
In: Blickpunkt Schulbuch (1969/6)
- BIGALKE, H. G.
Zur Situation der Mathematikdidaktik in der BRD.
In: Bericht über 4. Fachleitertagung, Kassel 1970
- BRAUN, R.
Stoffverteilungsplan für die Neue Mathematik.
Münster 1973
- BUTZKE, H.
Inhaltliche Fragen zur Modernisierung des Mathematik-
unterrichts in der Klasse I.
In: Mathematik in der Schule (1966/3)
- DALLMANN, G. u. HEYER, P.
Mathematikunterricht in der Grundschule.
Weinheim 1968
- FRICKE, A.
Neue Richtlinien und moderner Mathematikunterricht.
In: Die Ganzheitsschule (1970/3)
- GARLITZ, A. u. NESSNER, R.
Curriculare Entwicklungstendenzen im Elementarunterricht
(Lernbereich Mathematik) der Bundesrepublik Deutschland.
In: LILL (1977)
- GRUBISCH, H.
Studienhilfe: Modernisierung des Mathematikunterrichts.
In: Die Grundschule (1972/2)

GRIESING, W. u. SCHADY, W. K.

Der moderne Mathematikunterricht in den Klassen 1 - 6.
Erläuterungen zu den Rahmenplänen der Kultusminister
vom 3. Oktober 1968.
Braunschweig 1970

JELINEK, M.

Die Modernisierung des Mathematikunterrichts in den unteren Klassen.
In: Mathematik in der Schule (1965/2)

JELINEK, M.

Über die Bestrebungen zur Modernisierung des Mathematikunterrichts.
In: Mathematik in der Schule (1965/5)

JUNG, W.

Neue Wege im Mathematikunterricht.
In: Schweizer Schule (1968/12)

KAHABKA, B.

Der Mathematikunterricht im 1. Schülerjahrgang. 2 Teile.
München 1972

KARASCHEWSKI, H.

Erlanger Stellungnahme zur "Modernisierung" des Mathematikunterrichts.
In: Unterricht heute (1969/12)

KLEINSCHMIDT, G.

Die Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen.
In: Neue Unterrichtspraxis (1969/3)

KLEINSCHMIDT, G.

Unterrichtsreform setzt Methodenrevision voraus. Probleme der Lehrplanforschung, dargestellt am Mathematikunterricht der Grundschule.
In: Neue Unterrichtspraxis (1968/6)

MEYER, E.

Mathematik in den ersten Schuljahren - neue Ansätze für den Rechenunterricht in der Grundschule.
Stuttgart 1968

NEUNZIG, W. (Hsg.)

Konzeptionen für den Mathematikunterricht. Beiträge aus sechs Ländern.
Stuttgart 1970

NEUNZIG, W. u. SORGER, P.

Einstieg in die Mathematik. Aufriß eines systematischen
Weges für die Grundschule.
Freiburg 1969

SIELAFF, K. u. BÜDDEKER, W.

Analyse der Empfehlungen, Richtlinien und Rahmenpläne
zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den
allgemeinbildenden Schulen.
In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (1970/2)

SIRCH, L.

Der neue Grundschulunterricht in Wochenplänen. Band I/II.
Donauwörth 1971

TIETZ, H.

Bemerkungen zur Modernisierung des Mathematikunterrichts.
In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unter-
richt (1970/6)

UNGERER, K.

Moderne Mathematik in der Grundschule - Lernziele für
die 1. Schulstufe.
In: Erziehung und Unterricht (1973/1)

UNESCO INSTITUTE

Mathematics in Primary Education.
Hamburg 1966

UNESCO INSTITUTE

Mathematics Reform in the Primary School.
Hamburg 1967

UNGERER, K. W.

Moderne Mathematik in der Grundschule.
In: Hamburger Lehrerzeitung (1969)

Alfungsziele der Mathematik in der Grundschule.
In: Allgömer Schulanzeiger für die BRD (1970/2)

Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Ma-
thematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen.
Beschuß der Kultusminister-Konferenz vom 3. 10. 1968.
In: Materialien zum Mathematikunterricht in der Grund-
schule, Frankfurt/M. 1972

Koordinierung der Mathematiklehrpläne in der Bundesre-
publik (Tagungsprotokoll Oberwolfach).
In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (1971/3)

Lehrplan für die Grundschule der Länder Rheinland-Pfalz
und Saarland.
Grünstadt 1971

Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule. Schulver-
such in Nordrhein-Westfalen.
Wuppertal 1969

Schulreform in Bayern. Band I. Lehrpläne für die Grund-
schule, Orientierungsstufe und Hauptschule.
München 1970

(6) ZAHLSYSTEME UND ZAHLSYMBOLS - DARSTELLUNGEN ZUR BESCHREIBUNG,
GESTALTUNG, ERPROBUNG UND BEWERTUNG DES LEHRPROGRAMMS

ANTENBRINK, H.

Programmierter Unterricht und mathematische Lerninhalte -
Entwicklung einiger Fragestellungen.
In: Die Schulwarte (1972/5)

ARBEITSKREIS ZUR FÖRDERUNG UND PFLEGE WISSENSCHAFTLICHER ME-
THODEN DES LEHRENS UND LERNENS E. V.

Empfehlungen für die Prüfung von Unterrichtsprogrammen.
Berlin 1969

BARTMANN, T.

Denkerziehung im Programmierarten Unterricht. Untersuchun-
gen und Ergebnisse.
München 1966

DASLER, H.

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und stati-
stischen Methodenlehre.
Würzburg 1968

CHAUNCEY, H. u. DOBURA, J. E.

Der Test im modernen Bildungswesen.
Stuttgart 1968

CORRELL, W.

Programmiertes Lernen und schöpferisches Denken.
München 1966

- CRAM, D.
Lehrmaschinen - Lehrprogramme.
Weinheim 1965
- DRALLE, W.
Zur Methodik des Programmierten Rechenunterrichts.
Hannover 1968
- DRALLE, W. u. SIENGLER, W.
Programmierter Rechenunterricht und mathematische Einsicht.
In: Programmiertes Lernen, Unterrichtstechnologie und Unterrichtsforschung (1971/2)
- EIGLER, G.
Prüfung von Lehrprogrammen.
In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaftliche Forschung (1968/3)
- FRIEDE, C. K.
Ein Modell für die Beurteilung von Unterrichtsprogrammen.
In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaftliche Forschung (1971/3)
- GUILFORD, J. P.
Fundamental statistics in psychology and education.
New York 1965
- HUBER, G.
Lernpsychologische Befunde bei programmierter Unterweisung.
München 1966
- KLAUER, K. J.
Das Experiment in der pädagogischen Forschung.
Düsseldorf 1977
- KNABE, P.
Der programmierte mathematische Unterricht.
In: Handbuch der Schulmathematik (1963)
- LIENERT, G. A.
Testaufbau und Testanalyse.
Weinheim 1967
- LUSCHER, H.
Programmierter Unterricht im Spiegel erster Erfahrungen.
Braunschweig 1966
- LYSAUGHT, J. P. u. WILLIAMS, C. M.
Einführung in die Unterrichts-Programmierung. Anleitung zum Verfassen und Prüfen von Programmen.
München 1967

MARKLE, S. M.

Gute Lernschritte. Ein Programm lehrt bessere Lernschritte schreiben und erkennen.

München 1968

MITTENECKER, E.

Planung und statistische Auswertung von Experimenten. Eine Einführung für Psychologen, Biologen und Mediziner.

Wien 1963

ODENBACH, K.

Lernen durch Tun im programmierten Unterricht.

In: Pädagogische Rundschau (1965)

RÜTTEL, K.

Vergleichende Analyse einer Versuchsreihe mit programmiertem und konventionellem Unterricht.

In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaftliche Forschung (1968/4)

ROTH, H. u. BLUMENTHAL, A. (Hsg.)

Der programmierte Unterricht.

Hannover 1969

SCHIEFELE, H.

Lehrprogramme in der Schule. Grundlagen, Versuche, Erfahrungen.

München 1966

SCHIEFELE, H.

Programmierte Unterweisung. Ergebnisse und Probleme aus Theorie und Praxis.

München 1964

SCHIEFELE, H.

Wissenschaftliche Lernorganisation.

In: Welt der Schule (1964/1,2)

SCHIEFELE, H. u. HUNFER, G.

Programmierte Unterweisung - programmiert. Prinzipien, Techniken, Arbeitsschritte mit statistischer Erfolgsüberprüfung.

München 1966

SCHIRM, R. W.

Programmiertes Lernen. Eine Einführung in die Praxis moderner Lerntechnologie.

Stuttgart 1971

- SCHRÖDER, H.
Lerntheorie und Programmierung. Lerntheoretische Grundlagen der Programmierten Unterweisung.
München 1971
- SCHWARZ, I.
Programmierter Mathematikunterricht.
In: Beiträge zur Lehrerfortbildung, Band 3: Mathematik,
Wien 1971
- SIERSLEBEN, W. (Hsg.)
Lernen heute.
Weinheim 1969
- SKINNER, B. F.
The Technology of Teaching.
New York 1968
- VIET, U.
Aktivierung produktiver Denkprozesse im Mathematikunterricht durch Lehrprogramme.
In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hannover 1969
- WALKER, H. M.
Statistische Methoden für Psychologen und Pädagogen.
Weinheim 1963
- WILKNER, K.
Rechenprogramme.
In: Schule aktuell (1969/3)
- ZIELINSKI, J. (Hsg.)
Aspekte des programmierten Unterrichts.
Frankfurt 1971
- ZIELINSKI, J.
Methodik des programmierten Unterrichts.
Rattingen 1965
- ZIELINSKI, J.
Pädagogische Grundlagen der programmierten Unterweisung unter empirischem Aspekt.
Rattingen 1964

L E B E N S L A U F

11. 7. 1936 : Als Sohn des Rektors Max Fuchs und seiner Ehefrau Maria in Augsburg geboren.
- 1940 - 1947 : Volksschule in Augsburg.
- 1947 - 1956 : Humanistisches Gymnasium bei St. Stephan in Augsburg. Reifeprüfung.
- 1957 - 1960 : Pädag. Hochschule Augsburg der Universität München. Erste Prüfung für das Lehramt an Volksschulen.
- 1960 - 1963 : Vorbereitungsdienst in Augsburg. Anstellungsprüfung für das Lehramt an Volksschulen.
- 1965 - 1969 : Ausbildungslehrer an der Pädag. Hochschule in Augsburg.
- 1966 - 1967 : German Language Assistant am Ealing Technical College in London.
- Studium der Pädagogik, Psychologie und Soziologie am Institute of Education der Universität London: Bernstein, Brown, Cooper, Foss, Gardener, Hymen, Lauwerys, Lee, Waddington.
- Certificate of Proficiency in English der Universität Cambridge.
- 1968 - 1971 : Studium der Pädagogik, Psychologie und Soziologie an der Universität München: Barth, Betz, Bolte, Bourke, Bühl, Englert, Francis, Galvin, Gericke, Grimm, Hämerlin, Hofmarksrichter, Hornstein, Keilhacker, Kerner, Kramer, Kreckel, Kuhn, Kunkel, Lersch, Lückert, Maier, Müller, Roelcke, Rosenfeld, Schiefele, Schütte, Schulze-Gölde, Schwarz, Wasem.
- 1969 - 1971 : Förderassistent im Fach Didaktik der Grundschule an der Pädag. Hochschule Augsburg der Universität München.
- 1970 - 1974 : Dissertation bei Prof. Dr. Hans SCHIEFELE (Korreferent Prof. Dr. Karl SEEBACH), Universität München: Zahlensysteme und Zahlsymbole.
- 1971 - 1974 : Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für die Didaktik der Mathematik am Erziehungswissenschaftlichen Fachbereich der Universität Augsburg.
27. 7. 1975 : Rigorosum in den Fächern Pädagogik, Psychologie und Soziologie bei Prof. Dr. Hans SCHIEFELE, Prof. Dr. Heinz-Rolf LÜCKERT, Prof. Dr. Karl Martin BOLTE.

